Mircea Dan IUDEAN
Radu Adrian MUNTEANU
Laszlo RAPOLTI

Calitate și fiabilitate

- lucrări-

U.T.PRESS
Cluj-Napoca, 2026
ISBN 978-606-737-869-6

Mircea Dan IUDEAN
Radu Adrian MUNTEANU
Laszlo RAPOLTI

CALITATE ȘI FIABILITATE

-lucrări-

U.T. PRESS
Cluj-Napoca,2026
ISBN 978-606-737-869-6

Editura U.T.PRESS
Str. Observatorului nr. 34
400775 Cluj-Napoca
Tel.: 0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
www.utcluj.ro/editura

Recenzia: Prof. univ. dr. ing. Alexandru Sălceanu
Conf. dr. ing. Florin Drăgan

Pregătire format electronic on-line: Gabriela Groza

Copyright © 2026 Editura U.T.PRESS
Reproducerea integrală sau parţială a textului sau ilustraţiilor din această carte este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii U.T.PRESS.

ISBN 978-606-737-869-6

Cuprins

1. Statistică. Indicatori statistici ……... 3
2. Noțiuni de probabilitate ……..... 11
3. Distribuții de probabilitate …….. 24
4. Variabile aleatoare …….. 31
5. Indicatori de fiabilitate …… 35
6. Scheme logice de fiabilitate …… 43
7. Evaluarea fiabilității sistemelor prin metoda arborelui de defectare .. 53
8. Bibliografie ……. 60

1. STATISTICĂ. INDICATORI STATISTICI

Media reprezintă valoarea de sinteză care exprimă elementele esențiale, tipice și obiective din modul de manifestare a unui fenomen de masă.

Media aritmetică $(\overline{x})$:

- Pentru o serie simplă:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (1)$$

- Pentru o serie de distribuție (de frecvențe):

(media aritmetică ponderată)

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i} x_i n_i}{\sum_{i} n_i} \qquad (2)$$

unde:

x_i – reprezintă elementul *i* din șirul de date.

n – reprezintă numărul total de elemente din șir.

n_i – reprezintă frecvența de apariție a elementului *i* din șir.

Obs.: Media aritmetică e foarte sensibilă la valori extreme.

Proprietăți ale mediei artimetice

- $x_{\min} < \overline{x} < x_{\max}$ media artimetică se găsește între cele 2 valori extreme ale seriei;

- Suma abaterilor valorilor individuale de la medie este 0, media având proprietatea de a compensa abaterile pozitive cu cele negative.

Pentru seria (șirul) simplă:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0 \qquad (3)$$

Pentru seria de frecvențe:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) \cdot n_i = 0 \qquad (4)$$

Mediana (Me)

Mediana nu se calculează ci se identifică, ea reprezentând valoarea centrală a unei serii date, aranjate crescător sau descrescător.

- Pentru seria simplă: dacă seria are un număr impar de termeni, mediana este a (n+1)/2 valoare din seria ordonată. În cazul unei serii cu număr par de termeni, mediana va fi egală cu media artimetică a celor doi termeni centrali.

- Pentru seria de frecvențe:

- Se cumulează crescător frecvențele de apariție;
- Se determină locul medianei:

$$locMe = \frac{\sum n_i + 1}{2} \qquad (5)$$

- Se stabilește intervalul median ca fiind primul interval cu frecvența cumulată mai mare decât locul medianei;
- Se determină mediana pe baza formulei:

$$Me = x + k\frac{locMe - \sum n_{pMe}}{n_{Me}} \qquad (6)$$

unde:

x-limita inferioară a intervalului median;

k-mărimea intervalului median;

$\sum n_{pMe}$ - suma frecvențelor până la intervalul median;

n_{Me}-frecvența intervalului median.

Modulul (Mo)

Modulul sau moda nu se calculează ci se identifică, el reprezentând valoarea care înregistrează cea mai mare frecvență de apariție. (Obs.: pot exista mai multe valori modale.)

- Pentru seria simplă: modulul este valoarea care se înregistrează cel mai frecvent.

- Pentru seria de frecvențe:

  - Se determină intervalul modal (intervalul cu frecvența cea mai mare)
  - Se determină modulul pe baza formulei:

$$Mo = x + k\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \qquad (7)$$

Unde:

x-limita inferioară a intervalului modal;

k-mărimea intervalului modal;

Δ_1-diferența între frecvența intervalului modal și frecvența intervalului anterior;

Δ_2-diferența între frecvența intervalului modal și frecvența intervalului următor.

Indicatori de măsurare a variației și asimetriei

Abaterea medie liniară

- arată cu cât se abat, în medie, termenii seriei de la media lor

- Pentru serii simple:

$$\overline{d} = \frac{\sum \left| x_i - \overline{x} \right|}{n} \qquad (8)$$

- Pentru serii de frecvențe :

$$\overline{d} = \frac{\sum \left| x_i - \overline{x} \right| \cdot n_i}{\sum n_i} \qquad (9)$$

Dispersia

- arată modul în care termenii seriei gravitează în jurul mediei

- Pentru serii simple:

$$\sigma^2 = \frac{\sum \left(x_i - \overline{x} \right)^2}{n} \qquad (10)$$

- Pentru serii de frecvențe :

$$\sigma^2 = \frac{\sum \left(x_i - \overline{x} \right)^2 \cdot n_i}{\sum n_i} \qquad (11)$$

Abaterea medie patratică (abaterea standard, abaterea tip)

Reprezintă media pătratică (simplă sau ponderată) a abaterilor termenilor seriei de la media lor:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \qquad (12)$$

Coeficientul de variație (omogenitatea)

$$v = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100 \qquad (13)$$

- v apropiat de 0 arată lipsa variației (omogenitate foarte bună);
- v până la 50% arată o variație redusă, omogenitate bună respectiv media este reprezentativă;
- v mai mare de 50% arată o variație mare, omogenitate slabă respectiv media nu este reprezentativă.

Probleme:

1.1. Salariul net lunar al celor 12 angajați ai unei firme a înregistrat următoarele valori: 620; 540; 520; 1040; 820; 750; 580; 620; 2600; 620; 680; 690 euro. Stabiliți care dintre cei 3 indicatori statistici (media aritmetică, mediana, modulul) reprezintă valoarea medie cea mai semnificativă corespunzatoare seriei simple de date.

Răspuns

- Media aritmetică simplă:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{620 + 540 + \cdots + 690}{12} = \frac{10080}{12} = 840\ euro$$

- Mediana:necesită ordonarea seriei. Mediana se calculează ca media artimetică simplă a celor doi termeni centrali.

520; 540; 580; 620; 620; 620; 680; 690; 750; 820; 1040; 2600.

$$Me = \frac{620 + 680}{2} = 650\ euro$$

- Modulul: salariul cel mai des întâlnit

$$Mo = 620\ euro$$

Dintre cei 3 indicatori medii cea mai puțin reprezentativă este media aritmetică, aceasta fiind distorsionată de valoarea extremă din serie. Valoarea modală are o frecvență de apariție de doar 3 înregistrări (sub 50% din numărul de înregistrări), ceea ce face ca valoarea medianei să fie cea mai reprezentativă medie, corespunzatoare acestei serii.

1.2. Repartiția pe grupe de varstă a personalului dintr-o firmă este prezentată în tabelul de mai jos. Să se calculeze indicatorii statistici: media aritmetică, mediana și modulul pentru aceste grupe de vârstă.

Vârsta (ani)	Număr de pers. (n_i)	Centrul intervalului (x_i)	$x_i \cdot n_i$	Frecvențe cumulate
1	*2*	*3*	*4*	*5*
[15-25)	7	20	140	7
[25-35)	12	30	360	19
[35-45)	20	40	800	39
[45-55)	8	50	400	47
[55-65)	3	60	180	50
Total	50		1880	

Răspuns

- Media aritmetică:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i n_i}{\sum_i n_i} = \frac{1880}{50} = 37{,}6 ani$$

- Mediana: - necesită parcurgerea următoarelor etape:

1. Calculul frecvențelor cumulate crescător (coloana 5 a tabelului)
2. Determinarea locului medianei

$$locMe = \frac{\sum n_i + 1}{2} = \frac{50+1}{2} = 25{,}5$$

3. Stabilirea intervalului median: [35-45)
4. Aplicarea formulei medianei

$$Me = x + k\frac{locMe - \sum n_{pMe}}{n_{Me}} = 35 + 10\left(\frac{25{,}5-19}{20}\right) = 38{,}25ani$$

- Modulul: vârsta cea mai des întâlnită între cei 50 de angajați

1. Se determină intervalul modal (intervalul cu frecvența cea mai mare): [35-45)
2. Se calculează valoarea modală:

$$Mo = x + k\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 35 + 10\left(\frac{8}{8+12}\right) = 39ani$$

1.3. Se consideră aceeași repartiție pe grupe de vârstă a personalului din cadrul aceleiași firme. Să se stabilească dacă colectivitatea celor 50 de angajați este omogenă.

Vârsta (ani)	Număr de pers. (n_i)	Centrul intervalului (x_i)	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})n_i$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
[15-25)	7	20	-17.6	-123,2	2168,32
[25-35)	12	30	-7,6	-91,2	693,12
[35-45)	20	40	2,4	48	115,2
[45-55)	8	50	12,4	99,2	1230,08
[55-65)	3	60	22,4	67,2	1505,28
Total	50		12	0	5712

Răspuns

Pentru a stabili gradul de omogenitate a colectivității de 50 de angajați trebuie calculat coeficientul de variație (omogenitate).

- Din tabel (coloana 6) rezultă calculul dispersiei:

$$\sigma^2 = \frac{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot n_i}{\sum n_i} = \frac{5712}{50} = 114{,}24$$

- Abaterea medie patratică:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{114{,}24} = 10{,}68 ani$$

Aceasta semnifică faptul că vârsta medie a celor 50 de angajați ai firmei se abate în medie cu 10,68 ani de la media estimată.

- Coeficientul de variație (omogenitate):

$$v = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{10{,}68}{37{,}6} \cdot 100 = 28{,}4\%$$

Până la 50% arată o variație redusă, omogenitate bună respectiv media este reprezentativă.

2. NOȚIUNI DE PROBABILITATE

Tipuri de evenimente

Evenimente independente

Evenimente dependente

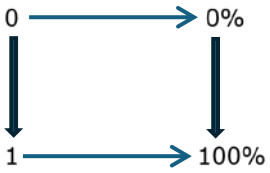
Evenimente interdependente

Sistem complet de evenimente

Un SISTEM COMPLET DE EVENIMENTE reprezintă totalitatea evenimentelor care se pot petrece dintr-un anumit punct de vedere

Suma probabilităților de apariție a evenimentelor ce compun un sistem complet de evenimente este 1 (sau 100%)

Orice eveniment are probabilitatea de apariție în intervalul [0,1]. Probabilitate 0 înseamnă că evenimentul nu are loc, iar probabilitate 1 înseamnă că evenimentul se petrece cu siguranță.



Probabilitatea se poate defini:

$$P(A) = \frac{n}{N} \qquad \frac{\text{cazuri favorabile}}{\text{cazuri total posibile}} \tag{14}$$

Unde:

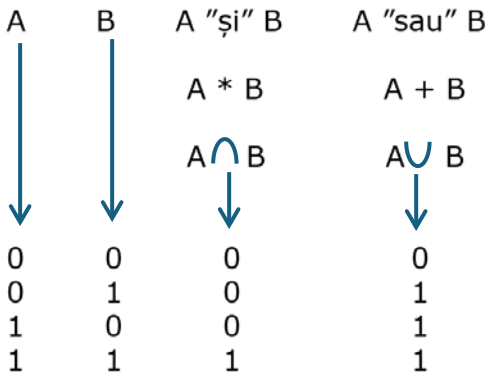
P(A) – probabilitatea ca evenimentul A să aibă loc

n – numărul de situații ce au loc pentru ca evenimentul A să se întâmple

N – numărul total de situații ce pot să apară

Obs.: se consideră că situațiile n sunt evenimente independente

Se consideră evenimentele A și B:



Reguli de calcul a probabilităților

1. Probabilitatea ca evenimentul A și evenimentul B să aibă loc se notează cu:

$$P(A \cdot B) \Leftrightarrow P(A \cap B) \qquad (15)$$

2. Probabilitatea ca evenimentul A sau evenimentul B să aibă loc se notează cu:

$$P(A + B) \Leftrightarrow P(A \cup B) \qquad (16)$$

3. Probabilitatea condițională: evenimentul A are loc doar dacă evenimentul B a avut deja loc. Aceasta se notează cu:

$$P(A \mid B) \qquad (17)$$

4. Probabilitatea complementului/evenimentului contrar: probabilitatea ca evenimentul A să nu aibă loc. Aceasta se notează cu:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{18}$$

5. Dacă evenimentele A și B sunt independente unul de altul atunci:

$$P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B}) = P(A)$$
$$P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A}) = P(B) \tag{19}$$

6. Probabilitatea ca evenimentul A și evenimentul B să aibă loc este (A și B independente):

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \tag{20}$$

7. Dacă evenimentele A și B sunt dependente unul de altul atunci:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B) \tag{21}$$

8. Probabilitatea ca evenimentul A sau evenimentul B să aibă loc este:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \tag{22}$$

9. Probabilitatea ca evenimentul A sau evenimentul B să aibă loc este (A și B independente):

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \tag{23}$$

P(A B)*P(B)
P(A)*P(B A)

10. Daca evenimentul A și evenimentul B sunt reciproc exclusive (A și B nu se pot petrece simultan) :

$$P(A \cdot B) = 0$$
$$P(A + B) = P(A) + P(B) \tag{24}$$

11. Teorema lui Bayes (rezultă din ecuația de la punctul 7)

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B) \quad (25)$$



$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{P(B)} \quad (26)$$

12. Teorema lui Bayes generalizată:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \cdot P(B \mid A)}{\sum_i P(B \mid E_i) P(E_i)} \quad (27)$$

Unde:

E_i reprezintă al i-lea eveniment.

Probleme:

2.1. Fie A_1 evenimentul ca un produs ales la întâmplare dintr-un lot să aibă defectul D_1 și A_2 evenimentul ca un produs ales la întâmplare dintr-un lot să aibă defectul D_2. Să se scrie evenimentele:

a) B_1- un produs luat la întâmplare să fie respins la control;

b) B_2- un produs luat la întâmplare să fie acceptat la control;

c) B_3- un produs luat la întâmplare să aibă defectul D_1, dar să nu aibă defectul D_2;

d) B_4- un produs luat la întâmplare să aibă ambele defecte.

Răspuns

Evenimentele cerute se scriu astfel:

a) $B_1 = A_1 \cup A_2$

b) $B_2 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$

c) $B_3 = A_1 \cap \overline{A_2}$

d) $B_4 = A_1 \cap A_2$

2.2. Un lot de piese se supune controlului de calitate. Se aleg 3 piese la întâmplare. Fie A_i, i=1,2,3 evenimentul ca piesa i să fie bună. Să se exprime evenimentele:

a) cel puțin o piesă controlată să fie bună;

b) toate piesele controlate sunt bune ;

c) cel puțin o piesă controlată este defectă;

d) toate piesele controlate sunt defecte;

e) o singură piesă este bună;

f) doua piese din cele controlate sunt bune.

Răspuns

a) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

b) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$

c) $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$

d) $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$

e) $\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3\right)$

f) $\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right) \cup \left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right)$

2.3. Se supun unui control n piese extrase din producția unei masini. Se notează cu A_i, i=1,..,n, evenimentul ca cea de-a i-a piesă extrasă să fie defectă. Să se exprime următoarele evenimente:

a) A – cel putin o piesa extrasă este defectă

b) B – toate piesele extrase sunt bune

Răspuns

Evenimentele cerute se scriu astfel:

a) $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

b) $B = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$

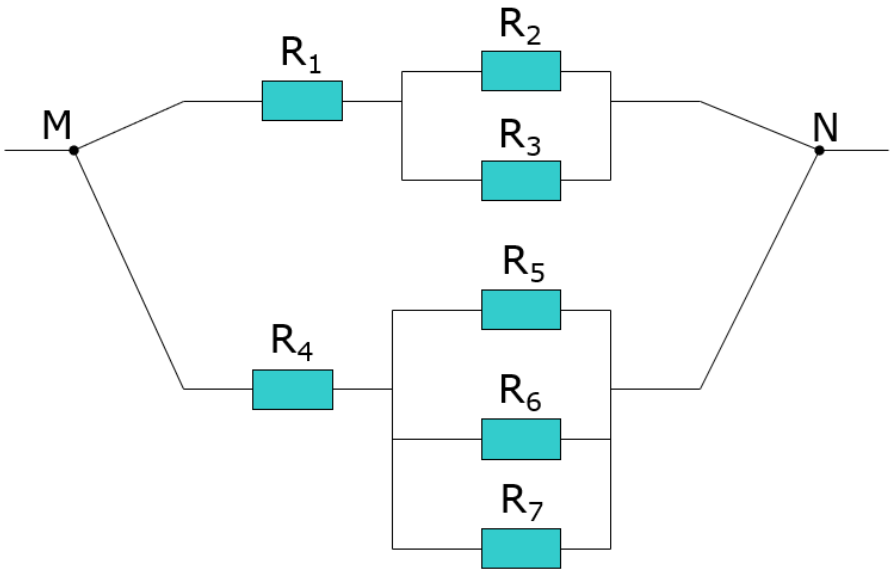
2.4. Rezistențele R_i montate în schema din figura următoare au fost extrase fiecare, la întâmplare din câte un lot de rezistențe L_i, i=1,..,7. Fiecare lot conține rezistențe bune și defecte. Se consideră evenimentele:

A – curentul electric trece de la punctul M la punctul N

B_i – rezistența R_i extrasă din lotul L_i este bună

a) Să se arate că $B_1 \cap (B_2 \cup B_3) \subset A$ și $B_4 \cap (B_5 \cup B_6 \cup B_7) \subset A$

b) Să se exprime evenimentele A și $\bar{A}$ prin intermediul evenimentelor B_i



Răspuns

a) Curentul electric trece de la M la N atunci când rezistența R_1 și cel puțin una dintre rezistențele R_2 și R_3 sunt bune, deci:

$$B_1 \cap (B_2 \cup B_3) \subset A$$

Curentul electric trece de la M la N atunci când rezistența R_4 și cel puțin una dintre rezistențele R_5, R_6 și R_7 sunt bune, deci:

$$B_4 \cap (B_5 \cup B_6 \cup B_7) \subset A$$

b) Evenimentele A și $\bar{A}$ se exprimă prin intermediul evenimentelor B_i astfel:

$$A = [B_1 \cap (B_2 \cup B_3)] \cup [B_4 \cap (B_5 \cup B_6 \cup B_7)]$$

$$\bar{A} = [\overline{B_1} \cup (\overline{B_2} \cap \overline{B_3})] \cap [\overline{B_4} \cup (\overline{B_5} \cap \overline{B_6} \cap \overline{B_7})]$$

2.5. Calculați probabilitatea ca să nimeriți cifra 5 prin aruncarea unui zar. Calculați probabilitatea ca să nimeriți cifra 5 de 3 ori consecutiv prin aruncarea unui zar.

Răspuns

$$P(obtinerea_cifrei_5) = \frac{1}{6}$$

$$P(obtinerea_cifrei_5_de_3_ori_consecutiv) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

2.6. Probabilitatea ca o rachetă să-și atinga ținta este 0,85. Dacă o salvă de două rachete este trasă, care este probabilitatea ca cel puțin una să-și atingă ținta? Se presupune că atingerea țintei de către cele două rachete reprezintă evenimente independente.

Răspuns

Fie A evenimentul "Prima racheta atinge ținta"

Fie B evenimentul "A doua rachetă atinge ținta"

Atunci:

$$P(A) = P(B) = 0{,}85$$
$$P(\overline{A}) = P(\overline{B}) = 0{,}15$$

Există 4 posibilități pentru cele 2 evenimente:

$A \cdot B$ - A și B au loc (ambele rachete lovesc ținta)

$\overline{A} \cdot B$ - doar B are loc (doar racheta B lovește ținta)

$A \cdot \overline{B}$ - doar A are loc (doar racheta A lovește ținta)

$\overline{A} \cdot \overline{B}$ - A și B nu au loc (ambele rachete ratează ținta)

Metoda 1:

Probabilitatea ca ambele rachete să rateze este:

$$P(\overline{A}\cdot\overline{B}) = P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}) = 0{,}15\cdot 0{,}15 = 0{,}0225$$

Rezultă că probabilitatea ca cel putin una să lovească ținta este:

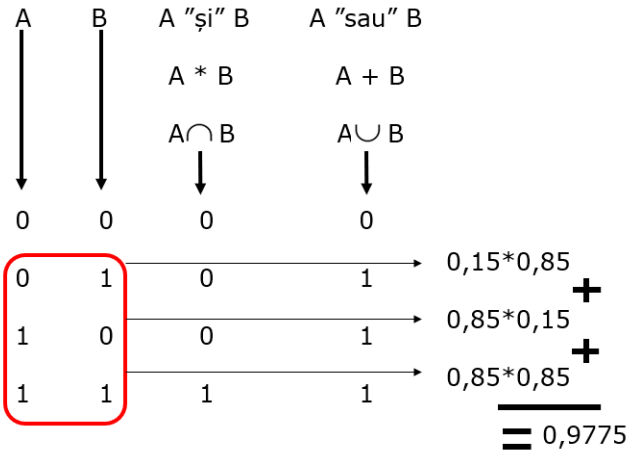
$$P_* = 1 - 0{,}0225 = 0{,}9775$$

Metoda 2:

Putem ajunge la același rezultat dacă folosim:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A\cdot B) = P(A) + P(B) - P(A)\cdot P(B) =$$
$$= 0{,}85 + 0{,}85 - 0{,}85\cdot 0{,}85 = 0{,}9775$$

Metoda 3:



2.7. Defectele care apar în timpul prelucrării unei piese la strung se pot produce din 2 cauze: centrarea imperfectă a cuțitului și calitatea necorespunzătoare a lui. Probabilitatea de apariție a unui defect din cauza imperfecțiunii centrării cuțitului este de 0,02, iar probabilitatea apariției unui defect provenit din calitatea necorespunzătoare a cuțitului este de 0,1. Să se determine probabilitatea de apariție a unei piese defecte.

Răspuns

Fie A evenimentul "Defect cauzat de descentrarea cuțitului"

Fie B evenimentul "Defect cauzat de calitatea necorespunzătoare a cuțitului"

Evenimentele A și B sunt independente:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}02 \cdot 0{,}1 = 0{,}002$$

Probabilitatea cerută este:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =$$
$$= 0{,}02 + 0{,}1 - 0{,}002 = 0{,}118$$

2.8. Un lot de 100 de rezistențe este supus controlului de calitate. Condiția ca acest lot să fie respins este găsirea a cel puțin unei rezistențe defecte în 5 verificări consecutive. Verificarea constă în a alege la întâmplare o rezistență din lot. Care este probabilitatea ca lotul să fie respins, dacă el conține 5% rezistențe defecte?

Răspuns

Fie A_i evenimentul: „la verificarea cu numarul i să se găsească o rezistență bună"

Fie A evenimentul: „lotul este respins"

$$P(\overline{A}) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P[A_3 \mid (A_1 \cap A_2)] \cdot P[A_4 \mid (A_1 \cap A_2 \cap A_3)] \cdot P[A_5 \mid (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)] =$$
$$= \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} \cdot \frac{91}{96} = 0{,}95 \cdot 0{,}9494 \cdot 0{,}9489 \cdot 0{,}9484 \cdot 0{,}9479 = 0{,}77$$

Atunci:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}77 = 0{,}23$$

2.9. O urnă conține 10 bile dintre care 3 sunt negre și 7 albe. Într-o probă este selectată la întâmplare o bilă, se observă culoarea după care se reintroduce în urnă împreună cu alte 2 bile de aceeași culoare. Care este probabilitatea ca o bilă neagră să fie selectată în fiecare din primele 3 probe?

Răspuns

Fie B_i evenimentul: „bila neagră este selectată la proba *i*”, i=1,2,3

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1) \cdot P(B_2 \mid B_1) \cdot P[B_3 \mid (B_1 \cap B_2)] =$$
$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{14} = \frac{1}{16}$$

2.10. Trei mașini A, B, C produc același produs. Mașina A produce 35% din întreaga producție, B produce 45%, iar C restul de producție. Procentele de piese de rebut corespunzătoare fiecărei mașini sunt 2%, 3% respectiv 1%. Se alege la întâmplare un produs din depozit. Care este probabilitatea ca:

a) produsul să fie defect;

b) produsul defect să fie fabricat de mașina B.

Răspuns

Fie A, B, C evenimentele ca un produs luat la întâmplare să fie fabricat de mașina corespunzătoare;

Fie X evenimentul ca un produs să fie defect;

Evenimentele A, B, C formează un sistem complet de evenimente.

Se stie că:

$$P(A) = 0{,}35; P(B) = 0{,}45; P(C) = 0{,}20$$
$$P(X \mid A) = 0{,}02; P(X \mid B) = 0{,}03; P(X \mid C) = 0{,}01$$

a)

$$P(X) = P(A) \cdot P(X \mid A) + P(B) \cdot P(X \mid B) + P(C) \cdot P(X \mid C) =$$
$$= 0,35 \cdot 0,02 + 0,45 \cdot 0,03 + 0,20 \cdot 0,01 = 0,007 + 0,0135 + 0,002 = 0,0225$$

b) se folosește Teorema lui Bayes:

$$P(B \mid X) = \frac{P(B) \cdot P(X \mid B)}{P(X)} = \frac{0,45 \cdot 0,03}{0,0225} = 0,6$$

2.11. Doi arcași trag asupra unei ținte câte o sageată, independent unul de altul. Probabilitatea ca primul să nimerească ținta este 0,8, iar pentru al doilea este 0,6. După tragere, în țintă se găsește o sageată. Care este probabilitatea ca ea să fie a primului arcaș?

Răspuns

Fie E_1 evenimentul: „primul arcaș nimerește ținta”

Fie E_2 evenimentul: „al doilea arcaș nimerește ținta”

La efectuarea experimentului au loc următoarele evenimente posibile:

- A_1 evenimentul: „primul arcaș nimerește ținta, al doilea arcaș ratează”
- A_2 evenimentul: „primul arcaș ratează, al doilea arcaș nimerește ținta”
- A_3 evenimentul: „ambii arcași nimeresc ținta”
- A_4 evenimentul: „ambii arcași ratează ținta”

Evenimentele A_i, i=1,..,4 satisfac condițiile unui sistem complet de evenimente.

$$P(E_1) = 0,8$$
$$P(E_2) = 0,6$$

$$P(A_1) = P(E_1 \cap \overline{E_2}) = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32$$
$$P(A_2) = P(\overline{E_1} \cap E_2) = 0,2 \cdot 0,6 = 0,12$$
$$P(A_3) = P(E_1 \cap E_2) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48$$
$$P(A_4) = P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$$

Fie X evenimentul: „în țintă este o sageată”

Atunci:

$$P(X \mid A_1) = 1$$
$$P(X \mid A_2) = 1$$
$$P(X \mid A_3) = 0$$
$$P(X \mid A_4) = 0$$

Rezultă că (formula lui Bayes):

$$P(A_1 \mid X) = \frac{P(A_1) \cdot P(X \mid A_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(X \mid A_i) \cdot P(A_i)} = \frac{0,32 \cdot 1}{1 \cdot 0,32 + 1 \cdot 0,12 + 0 \cdot 0,48 + 0 \cdot 0,08} = \frac{8}{11} = 0,7272$$

3. DISTRIBUȚII DE PROBABILITATE

Distribuția binomială

Reprezintă probabilitatea ca evenimentul A să se producă de k ori în n probe și este dată de relația:

$$P(n;k) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(n;k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \qquad (28)$$

Unde:

p – probabilitatea de apariție a evenimentului A

q – complementul lui p (q=1-p)

Funcția de probabilitate a repartiției binomiale are expresia:

$$P(x=k) = P(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (29)$$

Funcția de repartiție binomială are valoarea dată de expresia:

$$P(x \le k) = F(k) = \sum_{x=0}^{[k]} P(x) = \sum_{x=o}^{[k]} C_n^x p^x q^{n-x} \qquad (30)$$

Distribuția Poisson

Este repartiția evenimentelor rare, evenimente ca producerea unor avarii, producerea accidentelor, defectarea unor mașini și instalații tehnice și industriale. Dacă se notează cu λ densitatea de apariție a unui eveniment în unitatea de timp, atunci μ=λt reprezintă media aparițiilor evenimentului în intervalul de timp t. Probabilitatea de apariție de k ori a evenimentului respectiv în același interval t este:

$$P(x=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda t} \qquad (31)$$

Obs.: Distributia Poisson se folosește când în cerința problemei apare o structură de timp repetitivă (ex: de 2 ori pe minut, pe ora, pe an, etc.).

Funcția de probabilitate are expresia:

$$P(x=k)=\frac{\mu^k}{k!}\cdot e^{-\mu} \qquad (32)$$

Funcția de repartiție are valoarea dată de expresia:

$$P(x\le k)=F(k)=e^{-\mu}\sum_k\frac{\mu^k}{k!} \qquad (33)$$

Probleme:

3.1. Consumul energiei electrice în timpul unei zile nu întrece normele stabilite cu probabilitatea 0,8. Se cere calculul probabilității ca în 5 zile dintr-o saptămână consumul energiei electrice să nu depășească normele stabilite.

Răspuns

Se aplică distribuția binomială deoarece probabilitatea de a nu depăși normele stabilite este constantă ori de câte ori se efectuează această experiență. Probabilitatea căutată este:

$$p=C_7^5\cdot(0{,}8)^5\cdot(0{,}2)^2=\frac{7!}{5!\cdot(7-5)!}\cdot 0{,}32768\cdot 0{,}04=$$

$$=\frac{5040}{240}\cdot 0{,}32768\cdot 0{,}04=0{,}2752$$

3.2. Probabilitatea ca o zi din luna martie să fie ploioasă este 0,8.

a) Care este probabilitatea ca în prima decadă (primele 10 zile) a acestei luni să fie 4 zile ploioase?

b) Care este probabilitatea ca în prima decada a acestei luni să fie cel mult 4 zile ploioase?

c) Care este probabilitatea ca în prima decada a acestei luni toate zilele să fie însorite?

Răspuns

Se aplică distribuția binomială și se obțin probabilitățile

a)

$$p_1 = C_{10}^4 \cdot (0{,}8)^4 \cdot (0{,}2)^6 = \frac{10!}{4!\cdot(10-4)!} \cdot 0{,}4096 \cdot 0{,}000064 = 0{,}0055$$

b)

$$p_2 = 1 \cdot 1 \cdot (0{,}2)^{10} + C_{10}^1 \cdot (0{,}8)^1 \cdot (0{,}2)^9 + C_{10}^2 \cdot (0{,}8)^2 \cdot (0{,}2)^8 + C_{10}^3 \cdot (0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^7 + C_{10}^4 \cdot (0{,}8)^4 \cdot (0{,}2)^6 =$$
$$= 0{,}0000001024 + 0{,}000004096 + 0{,}000073728 + 0{,}000786432 + 0{,}005505024 = 0{,}0063693824$$

c)

$$p_3 = 1 \cdot 1 \cdot (0{,}2)^{10} = 0{,}0000001024$$

3.3. Un aparat este format din 10 subansamble. Probabilitatea ca un subansamblu să funcționeze fără defecte pe durata t este pentru fiecare subansamblu egală cu p, iar ieșirile lor din funcțiune sunt independente. Să se afle probabilitatea ca pe durata t să funcționeze:

a) cel puțin un subansamblu;

b) exact un subansamblu;

c) exact două subansamble;

d) cel puțin două subansamble.

Răspuns

a) Probabilitatea ca să nu funcționeze niciun subansamblu este:

$$P = 1 \cdot 1 \cdot q^{10}$$

Rezultă că probabilitatea ca să funcționeze cel puțin un subansamblu este:

$$p_1 = 1 - P = 1 - q^{10}$$

Unde:

$$q = 1 - p$$

b) In acest caz probabilitatea cerută este (conform repartiției binomiale):

$$p_2 = C_{10}^1 \cdot p \cdot q^9 = 10 \cdot p \cdot q^9$$

c) Conform repartiției binomiale:

$$p_3 = C_{10}^2 \cdot p^2 \cdot q^8 = 45 \cdot p^2 \cdot q^8$$

d) Conform probabilității complementului:

$$p_4 = 1 - (1 - p_1) - p_2 = 1 - q^{10} - 10 \cdot p \cdot q^9$$

3.4. Care este probabilitatea ca cineva să aștepte cel puțin 6 experimente înainte de a obține o anumită față când se aruncă un zar?

Răspuns

- Cel puțin 6 înseamnă de la 6 în sus, adică CU SIGURANȚĂ NU în primele 5 încercări.

Probabilitatea de a obține o anumită față la aruncarea unui zar în 5 experimente va fi:

Experimentul x	Probabilitatea p_x
1	$p_1 = \frac{1}{6} = 0{,}16$
2	$p_2 = \left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{6} = 0{,}14$
3	$p_3 = \left(1-\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6} = 0{,}12$
4	$p_4 = \left(1-\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6} = 0{,}10$
5	$p_5 = \left(1-\frac{1}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6} = 0{,}06$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

cel mult 5 reprezintă:

$$P(x \le 5) = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 0{,}58,$$

iar probabilitatea ca cineva să aștepte cel puțin 6 experimente înainte de a obține o anumită față va fi :

$$P(x \ge 6) = 1 - P(x \le 5) = 0{,}42$$

având în vedere că avem un sistem complet de evenimente:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_\infty = 1.$$

3.5. O substanță radioactivă emite o particulă alfa la fiecare 2 secunde (rată constantă). Care este probabilitatea de a detecta cel mult o particulă într-un interval de 10 secunde?

Răspuns

În 10 secunde se emit maxim 5 particule. Rezultă că media de apariție a evenimentului este:

$$\mu = 5$$

Cel mult o particulă înseamnă:

$$k = \overline{0,1}$$

Din calculul distribuției Poisson rezultă:

$$p(k) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}$$

Astfel probabilitatea de a detecta cel mult o particulă într-un interval de 10 secunde va fi:

$$P(x \le 1) = P(0) + P(1) = e^{-5}(1+5) = e^{-5} \cdot 6 = 0,04$$

3.6. Pe o porțiune de drum circulă mai multe autovehicule, fiecare total independent unul de altul și la momente aleatoare. Dacă printr-un anumit punct al drumului trec 300 de autovehicule în 2 ore să se calculeze probabilitatea ca într-un minut să treacă cel puțin 4 autovehicule.

Răspuns

Dacă în 2 ore trec 300 de autovehicule atunci într-un minut trec în medie:

$$\mu = 2,5$$

2h---120 min---300 autovehicule

1 min---x autovehicule

Cel puțin 4 autovehicule înseamnă:

$$k \ge 4$$

Se folosește distribuția Poisson:

$$p(k) = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}$$

Număr de autovehicule în orice minut	Probabilitatea P(x)
0	$P(0) = e^{-2,5} \cdot 1 = 0,082$
1	$P(1) = e^{-2,5} \cdot 2,5 = 0,205$
2	$P(2) = e^{-2,5} \cdot \frac{2,5^2}{2!} = 0,256$
3	$P(3) = e^{-2,5} \cdot \frac{2,5^3}{3!} = 0,213$
4 sau mai multe	$P(x \geq 4) = 1 - (P(0) + P(1) + P(2) + P(3)) =$ $= 1 - (0,082 + 0,205 + 0,256 + 0,213) = 0,244$

4. VARIABILE ALEATOARE

Variabila aleatoare discretă:

- o variabila aleatoare τ este discretă dacă aceasta poate lua un număr finit de valori.

Se ține cont de faptul că:

$$p_k = \Pr\{\tau = t_k\} \tag{34}$$

și

$$\sum_k p_k = 1 \tag{35}$$

O variabilă aleatoare discretă este cel mai bine descrisă de tabelul:

Valorile lui τ	t_1	t_2	t_3	…..	t_n
Probabilitățile de apariție pentru aceste valori	p_1	p_2	p_3	…..	p_n

unde n reprezintă un număr finit.

Media variabilei aleatoare:

- Pentru o variabilă aleatoare discretă τ cu valorile:

  $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ (36)

  ce are probabilitățile corespunzătoare:

  $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ (37)

Media acestei variabile aleatoare va fi M(τ):

$$M(\tau) = \sum_{k=1}^{n} t_k \cdot p_k \tag{38}$$

Obs.:

Dacă o variabilă aleatoare discretă X se poate scrie ca și sumă a mai multor variabile aleatoare discrete X_i, $i = \overline{1,n}$:

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n \tag{39}$$

atunci:

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n) \tag{40}$$

Probleme:

4.1. La un antrenament, un jucător de baschet marchează la coș cu probabilitatea de 0,6. Să se scrie repartiția variabilei aleatoare X care ia ca și valori numărul de aruncări reușite la coș când jucătorul aruncă mingea de 10 ori. Să se scrie și media acestei variabile aleatoare M(X).

Răspuns

Variabila aleatoare X poate lua valorile 0, 1, 2, … , 10. Pentru calculul probabilităților cu care sunt luate aceste valori folosim schema lui Bernoulli (distribuția binomială)

$$P(X = k) = C_{10}^{k}(0,6)^{k} \cdot (0,4)^{10-k}$$

unde:

$$k = \overline{0,10}$$

atunci putem scrie variabila aleatoare:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 9 & 10 \\ 1 \cdot 1 \cdot 0,4^{10} & C_{10}^{1} \cdot (0,6) \cdot (0,4)^{9} & ... & C_{10}^{9} \cdot (0,6)^{9} \cdot (0,4) & 1 \cdot 0,6^{10} \cdot 1 \end{pmatrix}$$

Media acestei variabile aleatoare este:

$$M(X) = 0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0{,}4^{10} + 1 \cdot C_{10}^{1} \cdot (0{,}6) \cdot (0{,}4)^{9} + \ldots +$$
$$+ 9 \cdot C_{10}^{9} \cdot (0{,}6)^{9} \cdot (0{,}4) + 10 \cdot 1 \cdot 0{,}6^{10} \cdot 1$$

4.2. O persoană scrie n scrisori la n corespondenți. Amestecă scrisorile și le introduce la întâmplare în n plicuri pe care erau scrise deja adresele. Se cere valoarea medie a numărului de concordanțe (adică un destinatar să primească scrisoarea adresată lui).

Răspuns

Fie X variabila aleatoare care reprezintă numărul de concordanțe.

Fie X_k variabila aleatoare care ia valoarea 1 sau 0, după cum pentru plicul k s-a obținut o concordanță sau nu.

Atunci:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

rezultă că:

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)$$

Fiecare variabilă X_k, $k=1,\ldots,n$ are aceeași repartiție.

$$P(X_k = 1) = \frac{1}{n}$$

și

$$P(X_k = 0) = 1 - P(X_k = 1) = 1 - \frac{1}{n}$$

pentru orice $k=1,\ldots,n$

Rezultă că:

$$X_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

pentru orice *k=1,…,n*.

Atunci:

$$M(X_k) = 0 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) + 1 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

pentru orice *k=1,…,n*

Rezultă că:

$$M(X) = \sum_k M(X_k) = \underbrace{M(X_k) + M(X_k) + ... + M(X_k)}_{de_n_ori} =$$

$$= n \cdot M(X_k) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

Va fi în medie o singură concordanță.

5. INDICATORI DE FIABILITATE

$R(t)$ - fiabilitatea reprezintă probabilitatea de funcţionare fără defecțiuni a unui sistem;

$\lambda(t)$ - rata de defect (intensitatea de defect, rata căderilor) este egală cu probabilitatea apariţiei defectelor raportată la probabilitatea de bună funcţionare;

$Q(t)$ - probabilitatea de defect a unui sistem;

$\mu(t)$ - rata de reparație (intensitatea de reparație) ;

$A(t)$ - disponibilitatea sistemului la momentul t;

MTBF (Mean Time Between Failures) – timpul mediu de funcționare între două defecțiuni succesive (timp mediu de bună funcţionare);

MTTF (Mean Time To Failure) – timpul mediu până la primul defect;

MTTR (Mean Time To Repair) - timpul mediu până la execuţia reparației.

unde t - reprezină timpul.

Relații între indicatorii de fiabilitate:

- Calculul fiabilității în cazul distribuției exponențiale când:

$$\lambda = ct.$$

se realizează cu formula:

$$R(t) = e^{-\lambda t} \qquad (41)$$

- Calculul fiabilității în cazul distribuției Weibull:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}} \qquad (42)$$

unde:

β reprezintă factorul de formă ;

η – factorul de poziție.

- Calculul probabilității de defect a unui sistem:

$$Q(t) = 1 - R(t) \tag{43}$$

- Calculul ratei de defect a unui sistem:

$$\lambda(t) = \frac{dQ(t)/dt}{R(t)} \tag{44}$$

- Calculul disponibilitatii unui sistem cand:

$$\lambda = ct.$$

și

$$\mu = ct.$$

se realizează cu formula:

$$A(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t} \tag{45}$$

- Calculul disponibilității unui sistem în caz general:

$$A(t) = \frac{MTBF}{MTTR + MTBF} \tag{46}$$

- Calculul MTTF:
  - se realizează cu formula:

$$MTTF = \frac{1}{\lambda} \tag{47}$$

dacă se cunoaște rata de defect și aceasta are o valoare constantă.

  - se realizează cu formula:

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t)dt \tag{48}$$

dacă se cunoaște fiabilitatea.

- Calculul MTBF:

$$MTBF = MTTF + MTTR \tag{49}$$

- Calculul MTTR:

$$MTTR = MTBF - MTTF \tag{50}$$

Probleme

5.1. Exemplu privind calculul fiabilității sistemelor simple:

Fie un circuit simplu format dintr-o siguranță fuzibilă:



Starea de succes este realizată în momentul în care elementul funcționează.

Se cunoaște durata de funcționare planificată:

$$T_p = 65000h$$

Parametrii statistici de siguranță ai elementului sunt:

- rata de defect (intensitatea de defect):

$$\lambda = 1{,}157 \cdot 10^{-4} h^{-1}$$

- rata de reparație (intensitatea de reparație):

$$\mu = 40000 \cdot 10^{-4} h^{-1}$$

Stările prin care poate trece sistemul sunt:

- starea “F” – element în funcțiune, siguranță bună;

- starea “D” – element defect, siguranță defectă (contacte întrerupte, fuzibil oxidat în timp, etc.).

Formarea matricii coeficienților (matrice patratică în care suma coeficienților pe fiecare coloana este nulă):

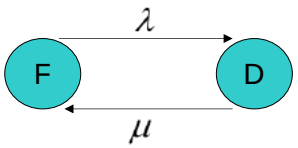
De la funcționare la defect trece cu λ (rata de defect)

Starea	F	D
F	-λ	μ
D	λ	-μ

De la defect la funcționare trece cu μ (rata de reparatie)

Tranzițiile dintr-o stare în alta se fac cu intensitățile de tranziție:

$q_{FD}=\lambda$ $q_{DF}=\mu$



Scrierea ecuațiilor:

P_F= P_s = Probabilitatea ca sistemul să funcționeze adică să se afle în starea “F”; probabilitatea de succes;

P_D= P_d = Probabilitatea ca sistemul să nu funcționeze; adică să se afle în starea “D”; probabilitatea de defect.

$$\begin{cases} -\lambda \cdot P_F + \mu \cdot P_D = 0 \\ \lambda \cdot P_F - \mu \cdot P_D = 0 \end{cases}$$

Sistemul nu se poate rezolva.

Avem încă o relație între probabilități:

$$P_F + P_D = 1$$

Rezultă că noul sistem este:

$$\begin{cases} -\lambda \cdot P_F + \mu \cdot P_D = 0 \\ P_F + P_D = 1 \end{cases}$$

Sitemul se rezolvă prin substituire:

$$P_D = 1 - P_F$$

rezultă că:

$$-\lambda \cdot P_F + \mu(1 - P_F) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\lambda \cdot P_F + \mu - \mu \cdot P_F = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\lambda + \mu) \cdot P_F = \mu \Rightarrow$$

rezultă că:

$$P_F = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$P_D = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda + \mu - \mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

$$P_D = 1 - P_F$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} P_0 &= P_s = 0{,}9999711 \\ P_1 &= P_d = 0{,}0000289 \end{aligned}$$

Probabilitatea funcționării neîntrerupte:

$$P_*(t) = P_s \cdot R(t)$$

unde:

$R(t)$ reprezintă fiabilitatea.

$$R(t) = e^{-\lambda \cdot t}$$

Dacă considerăm *t= 1 luna = 30 zile = 720 h* rezultă că:

$$R(t) = e^{-\lambda \cdot t} = e^{-0{,}083304} = 0{,}92$$

$$P_*(t) = P_s \cdot R(t) \approx 0{,}92$$

Durata medie a stării de succes este:

$$\alpha = P_s \cdot T_p \approx 64998h$$

Durata medie a stării de defect este:

$$\beta = P_d \cdot T_p \approx 2h$$

5.2. Un sistem este format din 5 elemente identice. Pentru ca acesta să funcționeze trebuie ca minim 3 elemente să fie funcționale. Defectele elementelor acestui sistem urmează o distribuție Weibull, cu parametrul de formă β egal cu 2,6 și parametrul de poziție η egal cu 3000 h.

a) să se calculeze fiabilitatea sistemului pentru 1000 h de operare (se utilizează funcția de repartiție binomială);

b) să se scrie relația de calcul a MTTF pentru un singur element din sistem.

Răspuns

a) Fie R_0 fiabilitatea unui element din sistem, adică probabilitatea acestuia să funcționeze.

Se folosește funcția de calcul a fiabilității urmărind distribuiția Weibull:

β este factorul de formă $\beta = 2{,}6$

η este factorul de poziție $\eta = 3000h$

t este timpul de operare $t = 1000h$

$$\Rightarrow \qquad R_0(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}}$$

Pentru 1000 h de funcționare:

$$R_0(1000) = e^{-\left(\frac{1}{3}\right)^{2,6}} = e^{-0,0574757} = 0,94$$

Având în vedere că trebuie să funcționeze minim 3 elemente din 5 (utilizând repartiția binomială):

$$R(3,5) = C_5^3 \cdot R_0^3 \cdot (1-R_0)^2 + C_5^4 R_0^4 \cdot (1-R_0) + C_5^5 R_0^5 \cdot (1-R_0)^0 = 0,98$$

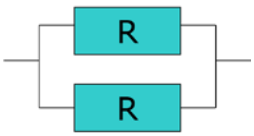
b) Notăm cu $MTTF_0$ timpul mediu până la primul defect pentru un element din sistem:

$$MTTF_0 = \int_0^\infty R_0(t)dt = \int_0^\infty e^{-\left(\frac{t}{3000}\right)^{2,6}} dt$$

5.3. Calculați MTTR (având mentenanță preventivă) pentru un sistem format din două elemente identice, legate în paralel. Se consideră că MTTF (timpul până la primul defect) urmează o distribuiție exponențială cu rata de defect *λ=1defect/1luna de operare*, intervalele de mentenanță MTBF sunt egale cu T_0 (intervalele la care se execută mentenanța prevenitivă).

Răspuns

Avem sistemul



unde:

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

și

$$\lambda = \frac{1}{luna} = \frac{1}{720h}$$

Fiabilitatea sistemului este:

$$R_s = R + R - R \cdot R = 2 \cdot R - R^2$$

Știm că:

$$MTTF = \frac{1}{\lambda} = \int_0^{T_0} R_s(t)dt = \int_0^{T_0} \left(2 \cdot e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}\right)dt = 720h$$

Avem mentenanța preventivă:

$$\Rightarrow \quad MTBF = MTTF + MTTR \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MTTR = MTBF - MTTF \Rightarrow$$

$$MTTR = T_0 - \int_0^{T_0} R_s(t)dt = T_0 - \int_0^{T_0} \left(2 \cdot e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}\right)dt = T_0 - 720h$$

6. SCHEME LOGICE DE FIABILITATE

Se definesc:

- q_i – probabilitatea de nefuncționare a elementului ”i”
- p_i – probabilitatea de funcționare a elementului ”i”

unde:

$$p_i + q_i = 1 \tag{51}$$

Pentru elemente legate în paralel:

$$q(t) = \prod_{i=1}^{n} q_i(t) \tag{52}$$

$$p(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - p_i(t)\right) \tag{53}$$

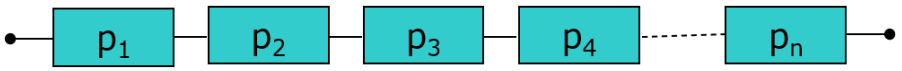
Pentru elemente legate în serie:

$$p(t) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t) \tag{54}$$

unde:

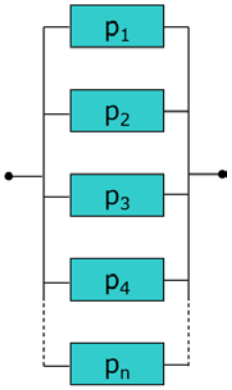
p – reprezintă probabilitatea de funcționare a sistemului (fiabilitatea sistemului).

Pentru un sistem format din n elemente legate în serie fiabilitatea este:



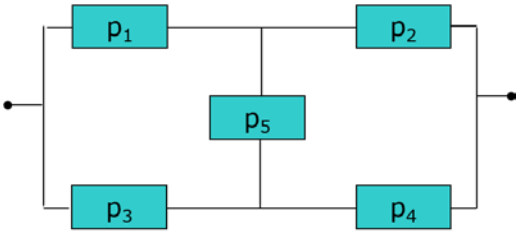
$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot \cdots \cdot p_n \tag{55}$$

Pentru un sistem format din *n* elemente legate în paralel fiabilitatea este:



$$p = 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_3) \cdot (1 - p_4) \cdot \ldots \cdot (1 - p_n) \quad (56)$$

Se consideră urmatorul sistem mixt:



Se cere să se determine fiabilitatea sistemului.

- Metoda 1: tabelul pentru determinarea stărilor de funcționare ale sistemului

  Notăm cu *"0"* starea de nefuncționare a elementului sau a sistemului, respectiv cu *"1"* starea de funcționare a acestora.

  Se știe că:

  $$p_i + q_i = 1$$

  Pentru că sistemul are 5 elemente rezultă că există 25 situații posibile (5^2).

E1	E2	E3	E4	E5	Sistem
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0

Fiabilitatea sistemului este:

$$p = p_1p_2p_3p_4p_5 + p_1p_2p_3p_4(1-p_5) + p_1p_2p_3(1-p_4)p_5 +$$
$$+ p_1p_2p_3(1-p_4)(1-p_5) + p_1p_2(1-p_3)p_4p_5 + p_1p_2(1-p_3)p_4(1-p_5) +$$
$$+ p_1p_2(1-p_3)(1-p_4)p_5 + p_1p_2(1-p_3)(1-p_4)(1-p_5) + p_1(1-p_2)p_3p_4p_5 +$$
$$+ p_1(1-p_2)p_3p_4(1-p_5) + p_1(1-p_2)(1-p_3)p_4p_5 + (1-p_1)p_2p_3p_4p_5 +$$
$$+ (1-p_1)p_2p_3p_4(1-p_5) + (1-p_1)p_2p_3(1-p_4)p_5 + (1-p_1)(1-p_2)p_3p_4p_5 +$$
$$+ (1-p_1)(1-p_2)p_3p_4(1-p_5)$$

- Metoda 2: metoda descompunerii

  Sistemul dat se descompune în două sisteme:

  1. Un sistem cu elementele 1, 2, 3, 4 și bornele elementului 5 legate;

  2. Un sistem cu elementele 1, 2, 3, 4 și bornele elementului 5 desfacute.

  Obs. La ambele sisteme lipsește elementul 5.

Fiabilitatea sistemului este dată de teorema descompunerii.

Teorema descompunerii:

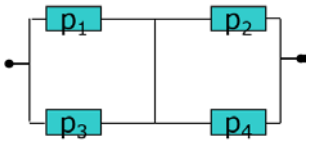
Probabilitatea funcționării fără defecțiuni a sistemului este egală cu produsul dintre probabilitatea p_i de funcționare fără defecțiuni a elementului V și probabilitatea de funcționare a restului sistemului când bornele elementului V sunt legate în scurtcircuit (f(V)) plus produsul dintre probabilitatea de nefuncționare ($1-p_i$) a elementului V și probabilitatea de funcționare a restului sistemului când elementul V este deconectat (bornele elementului V sunt lăsate în gol) (g(V)).

$$p(V) = p_i \cdot f(V) + (1 - p_i) \cdot g(V) \tag{57}$$

În cazul sistemului mixt prezentat anterior p_i este p_5.

Sistemul se va descompune astfel:

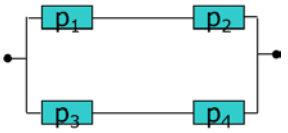
1. cu bornele elementului 5 legate în scurtcircuit:



$$\Rightarrow f(V)$$

$$f(V) = \left[1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_3)\right] \cdot \left[1 - (1 - p_2) \cdot (1 - p_4)\right]$$

2. cu bornele elementului 5 lăsate în gol:



$$\Rightarrow g(V)$$

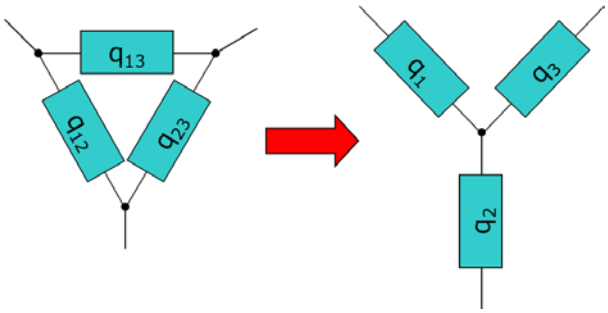
$$g(V) = 1 - (1 - p_1 \cdot p_2) \cdot (1 - p_3 \cdot p_4)$$

Prin urmare, funcția de fiabilitate a sistemului are expresia:

$$p(V) = p_5 \cdot f(V) + (1 - p_5) \cdot g(V) =$$
$$= p_5 \cdot [1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_3)] \cdot [1 - (1 - p_2) \cdot (1 - p_4)] +$$
$$+ (1 - p_5) \cdot [1 - (1 - p_1 \cdot p_2) \cdot (1 - p_3 \cdot p_4)]$$

- Metoda 3: teoremele de transfigurare
  Atenție: formulele de trecere de la un sistem la altul folosesc probabilitățile de defectare, de obicei în probleme sunt date fiabilitățile elementelor (probabilitățile de bună funcționare).
  Se va utiliza formula $p+q=1$ pentru fiecare element.

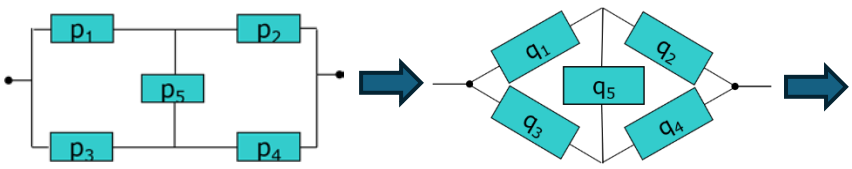
  a) Echivalența circuitelor triunghi-stea

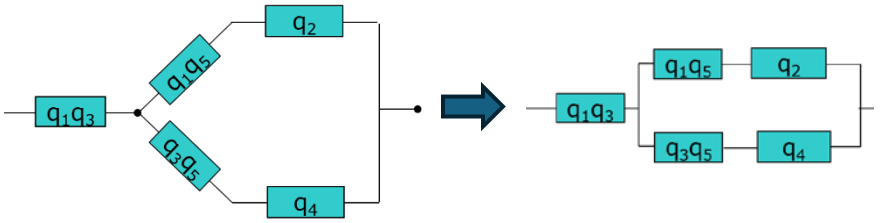


$$q_1 = q_{12} \cdot q_{13}$$
$$q_2 = q_{12} \cdot q_{23}$$
$$q_3 = q_{13} \cdot q_{23} \qquad (58)$$

Obs.: Formulele reprezintă probabilitățile de defectare ale elementelor noului sistem ($q=1-p$)

Pentru problema dată avem:





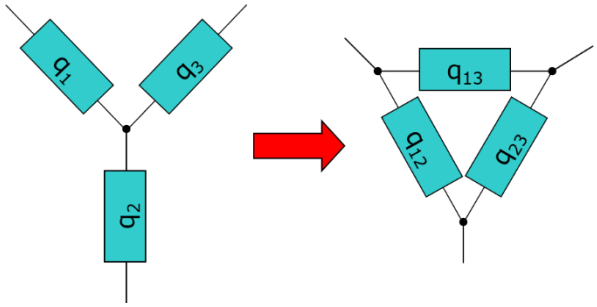
$$p_{152} = (1 - q_1 \cdot q_5) \cdot (1 - q_2)$$

$$p_{354} = (1 - q_3 \cdot q_5) \cdot (1 - q_4)$$

$$p_{elem.paralele} = 1 - (1 - p_{152}) \cdot (1 - p_{354})$$

$$p_{sistem} = (1 - q_1 \cdot q_3) \cdot p_{elem.paralele} =$$
$$= (1 - q_1 \cdot q_3) \cdot [1 - (1 - p_{152}) \cdot (1 - p_{354})] =$$
$$= (1 - q_1 \cdot q_3) \cdot \{1 - [1 - (1 - q_1 \cdot q_5) \cdot (1 - q_2)] \cdot [1 - (1 - q_3 \cdot q_5) \cdot (1 - q_4)]\}$$

b) Echivalența circuitelor stea-triunghi

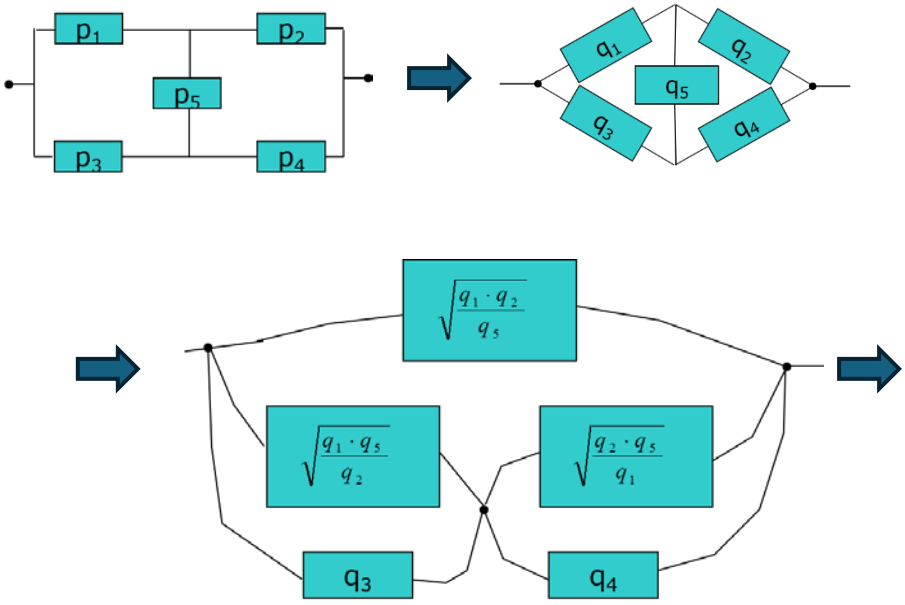


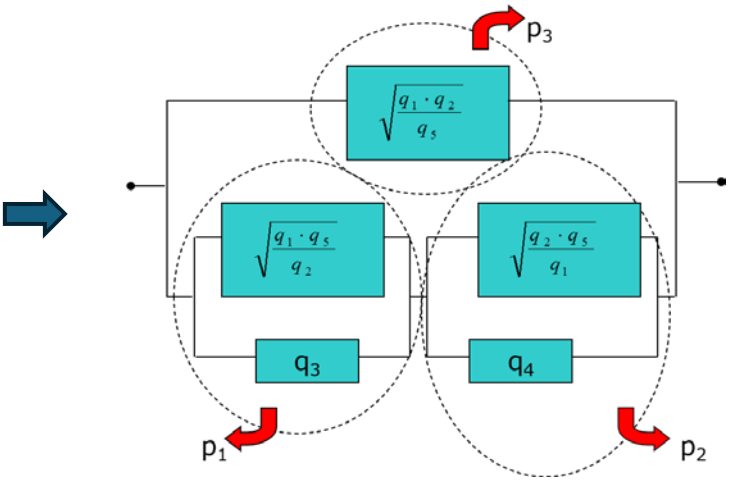
$$q_{12} = \sqrt{\frac{q_1 \cdot q_2}{q_3}}$$

$$q_{23} = \sqrt{\frac{q_2 \cdot q_3}{q_1}}$$

$$q_{13} = \sqrt{\frac{q_1 \cdot q_3}{q_2}} \qquad (59)$$

Obs.: Formulele reprezintă probabilitățile de defectare ale elementelor noului sistem ($q=1-p$)





$$p_1 = 1 - \left(1 - \left(1 - \sqrt{\frac{q_1 \cdot q_5}{q_2}}\right)\right) \cdot \left(1 - \left(1 - q_3\right)\right) = 1 - q_3 \cdot \sqrt{\frac{q_1 \cdot q_5}{q_2}}$$

$$p_2 = 1 - \left(1 - \left(1 - \sqrt{\frac{q_2 \cdot q_5}{q_1}}\right)\right) \cdot \left(1 - \left(1 - q_4\right)\right) = 1 - q_4 \cdot \sqrt{\frac{q_2 \cdot q_5}{q_1}}$$

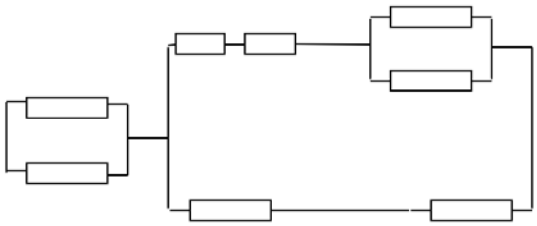
$$p_3 = 1 - \sqrt{\frac{q_2 \cdot q_5}{q_1}}$$

$$p_{sistem} = 1 - \left(1 - p_3\right) \cdot \left(1 - p_1 \cdot p_2\right)$$

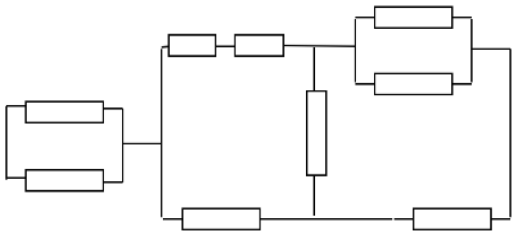
Problemă

6.1. Să se determine fiabilitatea sistemului, știind că fiecare element are fiabilitatea egală cu 0,9.

a)

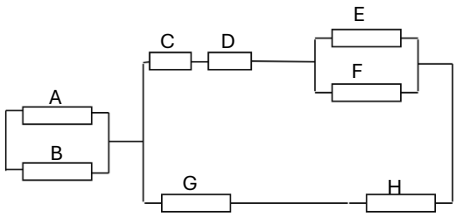


b)



Răspuns

a) Se vor nota elementele de pe figură.



Paralel 2 elemente simple (A,B) și (E,F): *1-0,1*0,1=0,99*

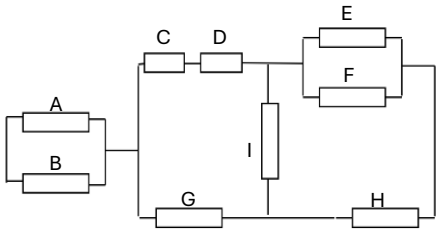
Serie 2 elemente simple (C,D) și (G,H): *0,9*0,9=0,81*

Echivalent elementele de sus (C,D,E,F): *0,81*0,99=0,8019*

Echivalent elemente paralel (C,D,E,F,G,H): *1-0,19*0,1981=0,9623*

Fiabilitate sistem (A,B,C,D,E,F,G,H): $R_{sistem}=0,99*0,9623=0,9527$

b) Se vor nota elementele de pe figură. Se poate folosi Teorema descompunerii:



Paralel 2 elemente simple (A,B) și (E,F): *1-0,1*0,1=0,99*

Serie 2 elemente simple (C,D): *0,9*0,9=0,81*

Se calculează F din teorema descompunerii pentru sistemul mixt (C,D,E,F,G,H,I) (bornele elementului I legate, elementul I lipsește) :

$$F=(1-0,19*0,1)(1-0,01*0,1)=0,981*0,999=0,98$$

Se calculează G din teorema descompunerii pentru sistemul mixt (C,D,E,F,G,H,I) (bornele elementului I dezlegate, elementul I lipsește) :

$$G=1-(1-0,81*0,99)(1-0,9*0,9)=1-0,1981*0,19\approx0,962$$

Fiabilitate sistem rmixt (C,D,E,F,G,H,I) redus la 5 elemente:

$$R_{sistem\ mixt}=0,9*F+0,1*G=0,9*0,98+0,1*0,962\approx0,882+0,0962\approx0,978$$

Fiabilitate sistem (A,B,C,D,E,F,G,H,I): $R_{sistem}=0,99*0,978\approx0,968$.

7. EVALUAREA FIABILITĂȚII SISTEMELOR PRIN METODA ARBORELUI DE DEFECTARE

Arborele de defectare se definește pornind de la un eveniment unic bine determinat. Aceste se numește EVENIMENT CRITIC.

Pentru calculul fiabilității acest eveniment (EVENIMENTUL CRITIC) reprezintă NEFUNCȚIONAREA sistemului.

Pentru realizarea unui arbore de defectare se formează niveluri succesive de evenimente astfel încât fiecare eveniment să aibă la intrare evenimente de pe un nivel inferior, prin intermediul unor operatori logici.

Pentru poarta “sau”



$$P_{echivalent} = 1-(1-P(E_1))\cdot(1-P(E_2))\cdot\ldots\cdot(1-P(E_n)) \quad (60)$$

Pentru poarta “si”

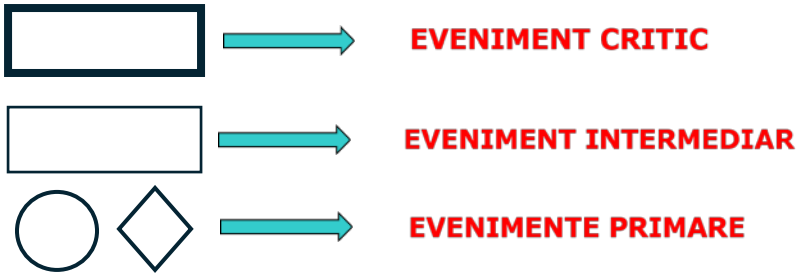


$$P_{echivalent} = P(E_1)\cdot P(E_2)\cdot\ldots\cdot P(E_n) \quad (61)$$

Obs.:

- Fiecare poartă logică nu poate să aibă decât o ieșire;
- Fiecare poartă logică trebuie să aibă minim 2 intrări.

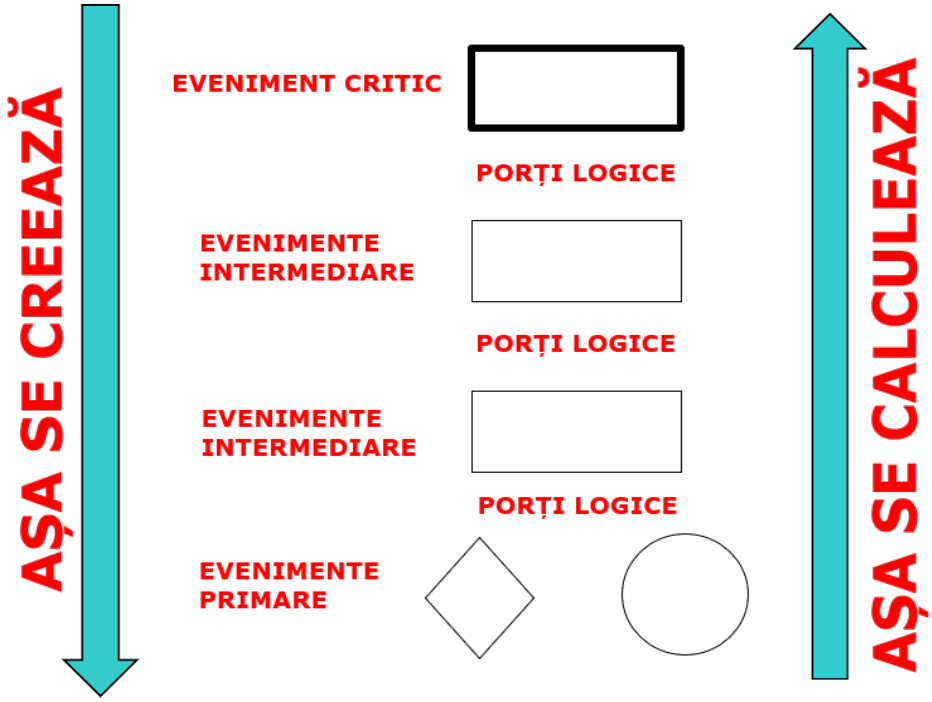
Arborele de defectare este o reprezentare grafică a combinațiilor de evenimente care conduc la realizarea evenimentului critic.



Cercul – eveniment primar (de bază) reprezintă un eveniment de defectare primar, pentru care nu se mai dezvoltă cauzele în arborele respectiv. Exemplu: defectarea unui rezistor, arderea unei siguranțe sau defectarea unui contact electric.

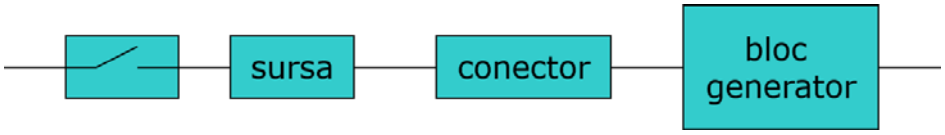
Rombul – eveniment primar reprezintă un eveniment a cărui cauză nu este dezvoltată mai departe, de exemplu pentru că analiza nu dispune de suficiente informații sau pentru că dezvoltarea nu este necesară. Exemplu: defectarea unui modul electronic, a unui ansamblu, ale cărui componente interne nu sunt analizate.

Structura arborelui de defectare:



Probleme

7.1. Se consideră un generator de semnal cu următoarea schemă bloc. Evenimentul critic este: “nu există semnal de ieșire deși generatorul a fost conectat la rețea”. Care este fiabilitatea sistemului?



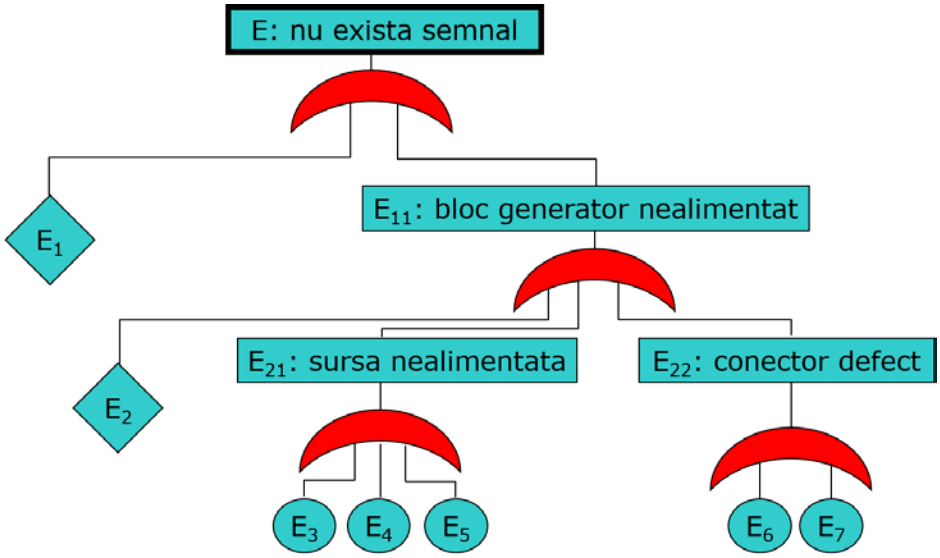
Răspuns

Probabilitatea de producere a evenimentului dat, poate fi evaluată succesiv, până la exprimarea ei în funcție de probabilitățile evenimentelor primare.

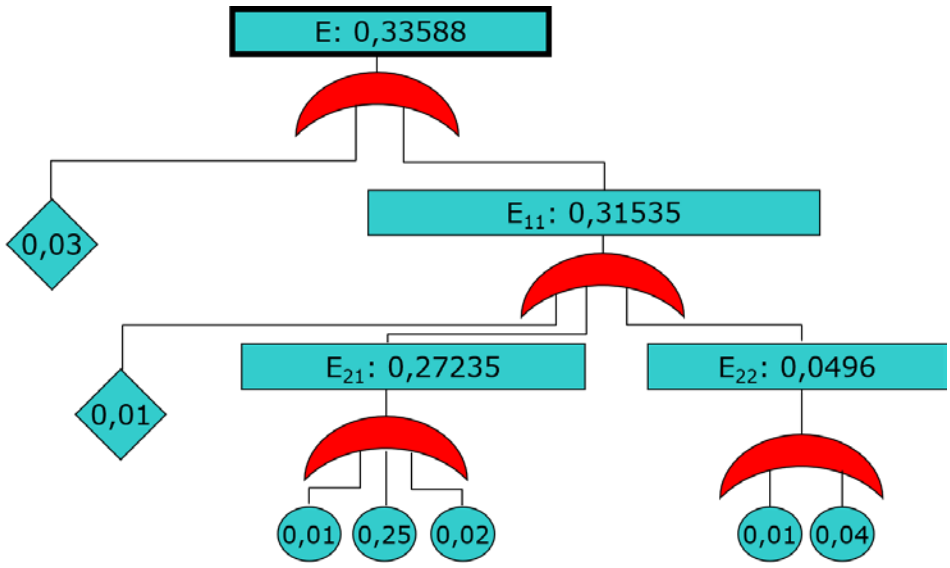
Avem evenimentele ce se pot considera evenimentele primare, precum și probabilitățile aferente:

E_1 – bloc generator defect	$P(E_1)=0,03$
E_2 – sursa defecta	$P(E_2)=0,01$
E_3 – intrerupator defect	$P(E_3)=0,01$
E_4 – cablu de alimentare intrerupt	$P(E_4)=0,25$
E_5 – lipsa tensiune in retea	$P(E_5)=0,02$
E_6 – conector intrerupt	$P(E_6)=0,01$
E_7 – conector in scurtcircuit	$P(E_7)=0,04$

Arborele de defectare corespunzător este:



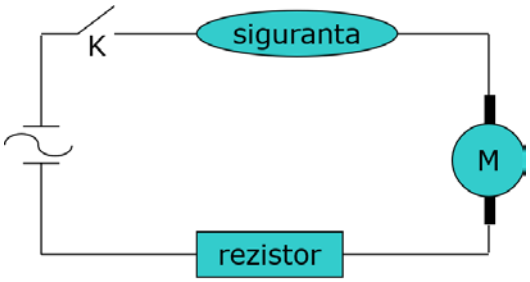
După realizarea calculelor:



Fiabilitatea sistemului este:

$$R = 1 - P(E) = 0{,}66412$$

7.2. Să se calculeze fiabilitatea sistemului din schema de mai jos:



Evenimentul critic îl reprezintă supraîncălzirea motorului (M);

Condiție inițială – întrerupător (K) închis;

Evenimente nepermise – defecte datorate factorilor externi ai sistemului.

Răspuns

Pe baza unui raționament logic rezultă că M se încălzește datorită unei suprasarcini electrice sau datorită unei defectări primare a M (frecare în lagăre datorită proastei lubrifieri, sau o posibilă defectare a bobinajului (un scurtcircuit parțial)).

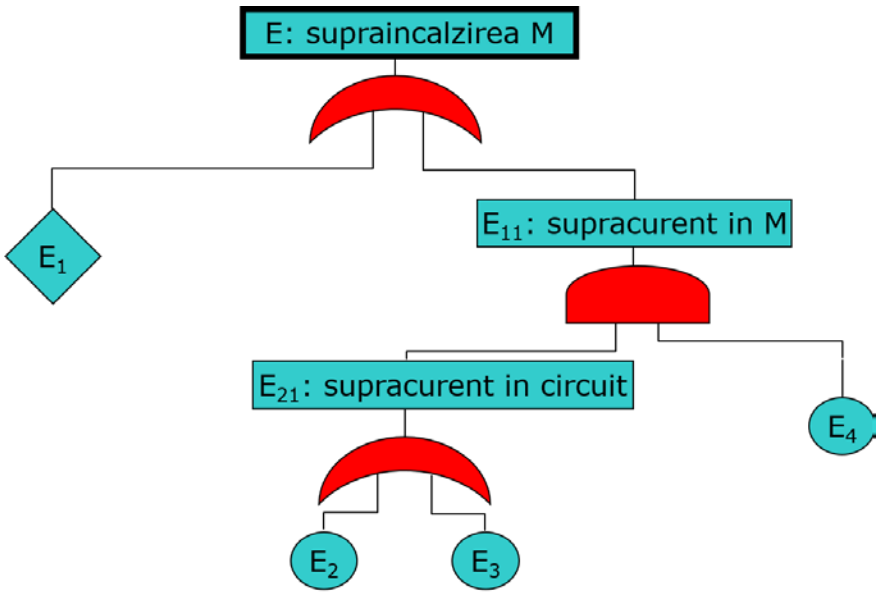
Avem evenimentele primare ce se pot considera, precum și probabilitățile lor:

E_1 – motor (M) defect	$P(E_1)=0{,}001$
E_2 – rezistor defect	$P(E_2)=0{,}003$
E_3 – sursă defectă	$P(E_3)=0{,}0001$
E_4 – siguranță defectă	$P(E_4)=0{,}005$

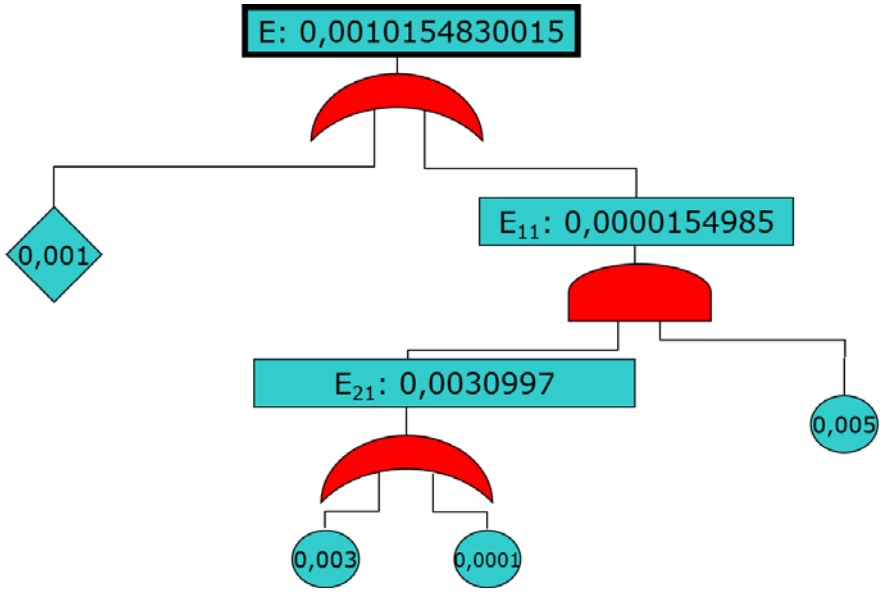
Evenimentul E_{11} “supracurent în M” are loc dacă în circuit apare un supracurent ȘI siguranța nu își îndeplinește rolul.

Evenimentul E_{21} “supracurent în circuit” are loc dacă în circuit apare o defectare tip scurtcircuit pentru rezistor SAU o defectare tip supratensiune pe sursă.

Arborele de defectare corespunzător este:



După realizarea calculelor:



Fiabilitatea sistemului este:

$$R = 1 - P(E) \approx 0{,}9989845$$

8. BIBLIOGRAFIE

1. Reliability: A Practitioner's Guide Relex 2007
2. Reference Guide, PTC Windchill Quality Solutions™ 10.2, August 2013
3. Iudean, Dan - "Reliability and Availability of Repairable Systems", Summer Academy Ohrid, Course 3, ISBN 978-973-662-385-1, Editura U.T.PRESS, Cluj-Napoca, 2008
4. Iudean, Dan - "Influenţa vibraţiilor asupra fiabilităţii motoarelor electrice şi algoritm pentru optimizarea proiectării acestora", ISBN 978-973-713-337-3, Editura Mediamira, 2016
5. Dan Iudean, R. Munteanu jr., R. Dragomirescu and M. Buzdugan „MS-1 N-8811 Permanent Magnet Synchronous Motor Reliability Calculation", 4th International Conference on Modern Power Systems MPS 2011, 17-20 Mai 2011
6. Dan Iudean, R. Munteanu jr., V. Zaharia, M. Dobra „Reliability Indicators Analysis for the Cam Box Module of Industrial Knitting Machines", 49th International Universities' Power Engineering Conference – UPEC 2014
7. A. Cretu, R. Munteanu jr., Dan Iudean, P. Karaisas, V. Vladareanu „Quality of Modern Products – A Case Study on Smartphones", 2016 International Conference on Production Research – Africa, Europe and the Middle East, 4th International Conference on Quality and Innovation in Engineering and Management (QIEM) 2016
8. Dan Iudean, Adina Georgiana Mihu, Radu A. Munteanu „Reliability Analysis through Block Diagram for a Hybrid Lighting System" The 9th International Conference on Modern Power Systems MPS 2021, 16th - 17th June 2021
9. Iudean, Dan, Mihu, Adina Georgiana; Farcaș, Valentin Ioan, Munteanu, Radu „Reliability, Unreliability and Failure Rate of a Hybrid Lighting System", EPE 2022
10. Dan Iudean, A. Cretu, R. Munteanu jr., Nicoleta Stroia, D. Moga, Rozica Moga, L. Vladareanu „Reliability Approach of a

Compressor System using Reliability Block Diagrams" International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering, 2019
11. Schmidt, R., & Wagner, T. "Safety Considerations in Industry 4.0 Implementation." Journal of Manufacturing Systems, 2023
12. Johnson, C., & Kessler, A.M. "The Integration of Safety and Security Engineering for Industrial Control Systems." Process Safety and Environmental Protection, 2022
13. Braband, J., & Schäbe, H. "Probability and Security – Pitfalls and Chances." Safety Science, 2021
14. International Electrotechnical Commission. "IEC 61508-2:2010 Functional Safety of E/E/PE Safety-related Systems - Part 2: Requirements for E/E/PE safety-related systems." Geneva: IEC, 2010
15. International Electrotechnical Commission. "IEC 61508-1:2010 Functional Safety of Electrical/Electronic/Programmable Electronic Safety-related Systems - Part 1: General requirements." Geneva: IEC, 2010
16. Munteanu, R., Todoran, Gh., "Teoria și practica prelucrării datelor de măsurare", Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 1997
17. Munteanu, R., "Statistical Control and Reliability", Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982
18. Munteanu, R., Rusu, T. – "Indroducere în ingineria calității", Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2002