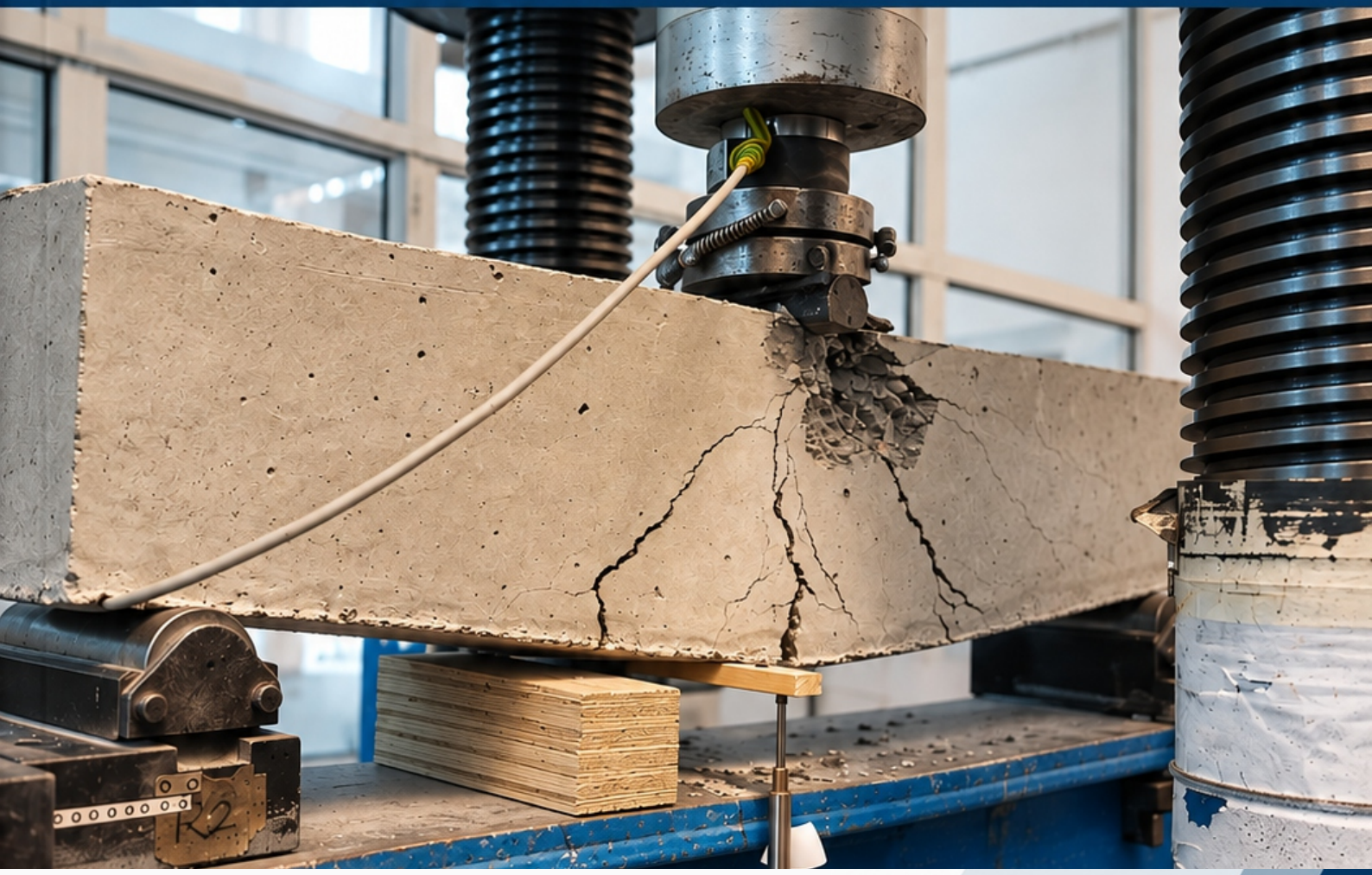
Ioan Pavel ȘOȘA

PROIECTAREA GRINZILOR DIN BETON ARMAT
la starea limită ultimă
Încovoiere și forță tăietoare

Conform SR EN 1992-1-1:2024 și Anexei Naționale SR EN 1992-1-1/NA:2025



U.T.PRESS
Cluj-Napoca, 2026
ISBN 978-606-737-853-5

Pavel Ioan ȘOȘA

PROIECTAREA GRINZILOR DIN BETON ARMAT LA STAREA LIMITĂ ULTIMĂ

Încovoiere și forță tăietoare

Conform SR EN 1992-1-1:2024 și Anexei Naționale SR EN 1992-1-1/NA:2025

U.T.PRESS
Cluj - Napoca, 2026
ISBN 978-606-737-853-5

Editura U.T.PRESS
Str. Observatorului nr. 34
400775 Cluj-Napoca
Tel.: 0264-401.999
e-mail: utpress@biblio.utcluj.ro
http://biblioteca.utcluj.ro/editura

Recenzia: Conf.dr.ing. Bogdan Hegheș
Ș.l.dr.ing. Eugenia Oana Gherman

Pregătire format electronic on-line: Gabriela Groza

Copyright © 2026 Editura U.T.PRESS
Reproducerea integrală sau parţială a textului sau ilustraţiilor din această carte este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii U.T.PRESS.

ISBN 978-606-737-853-5

PREFAȚĂ

Această lucrare a pornit de la cursurile proprii de Beton Armat, predate la Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, și de la textul SR EN 1992-1-1:2024 și al Anexei Naționale SR EN 1992-1-1/NA:2025 — ediția aflată în vigoare la data redactării, care aduce, față de ediția anterioară din 2004, schimbări semnificative de metodologie (sistemul de clase de rezistență la expunere pentru durabilitate, formula rafinată a lungimii de ancorare, controlul simplificat al săgeților dependent de procentul de armare, printre altele).

Cartea tratează exclusiv proiectarea grinzilor dreptunghiulare din beton armat, la starea limită ultimă: încovoierea și forța tăietoare. Nu tratează secțiunile T, armarea dublă, plăcile, stâlpii sau starea limită de serviciu — subiecte care depășesc scopul propus, acela de a oferi un parcurs complet și verificat pentru cazul cel mai frecvent întâlnit de un student la primul contact cu proiectarea betonului armat.

Fiecare capitol urmărește: deducerea relațiilor de calcul din principii de echilibru, etapele practice de dimensionare, și exemple complet rezolvate.

CUPRINS

PREFAȚĂ 2

CUPRINS 3

LISTĂ DE NOTAȚII 5

Materiale (capitolul 2) 5

Durabilitate și acoperire cu beton (capitolul 3) 5

Încovoiere (capitolul 4) 6

Forță tăietoare (capitolul 5) 7

INTRODUCERE ÎN PROIECTAREA GRINZILOR DIN BETON ARMAT 8

1.1 Rolul grinzilor în structurile din beton armat 8

1.2 Principii generale de proiectare la stări limită 10

1.3 Structura SR EN 1992-1-1:2024 și a Anexei Naționale SR EN 1992-1-1/NA:2025 11

CARACTERISTICILE MATERIALELOR UTILIZATE ÎN CALCULUL LA STAREA LIMITĂ ULTIMĂ 15

2.1 Introducere 15

2.2 Armătura 16

2.3 Betonul 22

2.4 Acțiunea compozită oțel-beton 27

2.5 Exerciții rezolvate 28

DURABILITATEA ȘI ACOPERIREA CU BETON A ARMĂTURII 35

3.1 Introducere 35

3.2 Clase de expunere 36

3.3 Acoperirea minimă, c_{min} și clase de rezistență beton 38

3.4 Acoperirea nominală c_{nom} și reguli practice de alegere 42
3.5 Determinarea acoperirii conform sistemului ERC 44
3.6 Exerciții rezolvate 47
CALCULUL LA ÎNCOVOIERE AL GRINZILOR DIN BETON ARMAT LA SLU 53
4.1 Introducere 53
Moduri teoretice de cedare a unei grinzi încovoiate 56
4.2 Reguli de armare longitudinală 57
Armătura minimă $A_{s,min}$ 57
Armătura maximă $A_{s,max}$ 62
Distanța dintre bare 63
4.3 Deducerea relațiilor de calcul 71
4.4 Etapele de calcul 73
4.5 Exemple de calcul 77
CALCULUL LA FORȚĂ TĂIETOARE AL GRINZILOR DIN BETON ARMAT LA SLU 90
5.1 Introducere 90
5.2 Elemente fără armătură de forfecare calculată 92
5.3 Elemente cu armătură de forfecare — modelul grinzii cu zăbrele 94
5.4 Reguli de armare la forță tăietoare 100
5.5 Reducerea forței tăietoare de calcul lângă reazeme 106
5.6 Etapele de calcul 108
5.7 Exemple de calcul 114
EXEMPLE COMPLETE DE PROIECTARE 129
BIBLIOGRAFIE 156

LISTĂ DE NOTAȚII

Notațiile de mai jos urmează, cu puține excepții semnalate în text, simbolurile din SR EN 1992-1-1:2024. Sunt grupate pe teme, în ordinea în care apar în carte.

Materiale (capitolul 2)

Simbol	Semnificație
f_{ck}	rezistența caracteristică la compresiune a betonului, pe cilindru
f_{cm}	rezistența medie la compresiune a betonului
f_{cd}	rezistența de calcul la compresiune a betonului
f_{ctm}	rezistența medie la întindere axială a betonului
$f_{ctk,0,05}$	rezistența caracteristică la întindere, fractil 5%
E_{cm}	modulul de elasticitate secant al betonului
ε_{cu}, ε_{c2}	deformația specifică ultimă, respectiv de tranziție, a betonului comprimat
f_{yk}	limita de curgere caracteristică a armăturii
f_{yd}	limita de curgere de calcul a armăturii
E_s	modulul de elasticitate al oțelului
ε_{yd}, ε_{uk}	deformația specifică de curgere de calcul, respectiv ultimă, a armăturii
γ_C, γ_S, γ_V	coeficienți parțiali de siguranță pentru beton, oțel, respectiv forfecare

Durabilitate și acoperire cu beton (capitolul 3)

Simbol	Semnificație
c_{nom}	acoperirea nominală cu beton
c_{min}, $c_{min,dur}$, $c_{min,b}$	acoperirea minimă; componentele de durabilitate, respectiv de aderență
Δc_{dev}	toleranța de execuție adăugată la acoperirea minimă
cd	acoperirea determinantă pentru riscul de despicare
d1	distanța de la fața betonului la centrul de greutate al armăturii întinse
cs	distanța liberă între bare
D_{upper}, D_{lower}	dimensiunea maximă/de referință a agregatului
S1...S6	clase structurale (Anexa P)
XC, XD, XS, XF, XA, XM	clase de expunere

Încovoiere (capitolul 4)

Simbol	Semnificație
M_{Ed}, M_{Rd}	momentul încovoietor de calcul, respectiv capabil
b, h, d	lățimea, înălțimea totală, respectiv înălțimea utilă a secțiunii
x, z	adâncimea axei neutre, respectiv brațul de pârghie
μ, μ_{lim}	momentul redus, respectiv valoarea sa limită (ductilitate)
ξ, ξ_{lim}	adâncimea relativă a axei neutre (x/d), respectiv valoarea sa limită
ω	coeficientul mecanic de armare

Simbol	Semnificație
A_s, $A_{s,nec}$, $A_{s,eff}$	aria de armătură (generic; necesară; efectiv aleasă)
$A_{s,min}$, $A_{s,max}$	aria minimă, respectiv maximă, de armătură longitudinală

Forță tăietoare (capitolul 5)

Simbol	Semnificație
V_{Ed}	forța tăietoare de calcul
τ_{Ed}, $\tau_{Rd,c}$, $\tau_{Rd,s}$, $\tau_{Rd,max}$	efortul unitar tangențial de calcul; rezistența fără armătură; rezistența etrierilor; rezistența bielelor
θ, $\cot\theta$	unghiul bielelor comprimate față de axul grinzii, respectiv cotangenta lui
ν	coeficient de reducere a rezistenței betonului fisurat înclinat
ρ_l, ρ_w, $\rho_{w,min}$	procent de armare longitudinală; transversală; minim de armare transversală
A_{sw}, s	aria etrierului (ambele brațe); distanța între etrieri
b_w	lățimea minimă a inimii grinzii
Fci, Fcv	rezultanta eforturilor din biela comprimată; componenta ei verticală

INTRODUCERE ÎN PROIECTAREA GRINZILOR DIN BETON ARMAT

1.1 Rolul grinzilor în structurile din beton armat

Obiectivele capitolului

- identificarea rolului grinzilor în sistemele structurale din beton armat;
- înțelegerea modului de transmitere a încărcărilor către elementele verticale ale structurii;
- explicarea principalelor solicitări care acționează asupra unei grinzi;
- înțelegerea importanței unei proiectări corecte în asigurarea siguranței și economiei unei construcții.

1.1.1 Generalități

Grinzile reprezintă unul dintre cele mai importante elemente structurale ale construcțiilor din beton armat. Împreună cu plăcile, stâlpii și pereții structurali, acestea contribuie la formarea sistemului portant al clădirii și asigură transmiterea în siguranță a încărcărilor către fundații.

În construcțiile curente, încărcările provenite din greutatea proprie a elementelor structurale, încărcările utile, zăpada, vântul sau alte acțiuni sunt preluate inițial de planșee. Acestea transmit încărcările către grinzi, iar grinzile le transferă mai departe către stâlpi sau pereți structurali. În final, toate acțiunile sunt preluate de fundații și transmise terenului de fundare.

Din acest motiv, grinzile constituie elemente esențiale ale traseului de transmitere a încărcărilor într-o construcție. O proiectare incorectă poate afecta nu numai comportarea grinzii, ci și funcționarea întregului sistem structural.

Observație

În practică, grinda nu este analizată doar ca un element izolat. Ea face parte dintr-un sistem structural în care comportarea fiecărui element influențează răspunsul global al construcției.

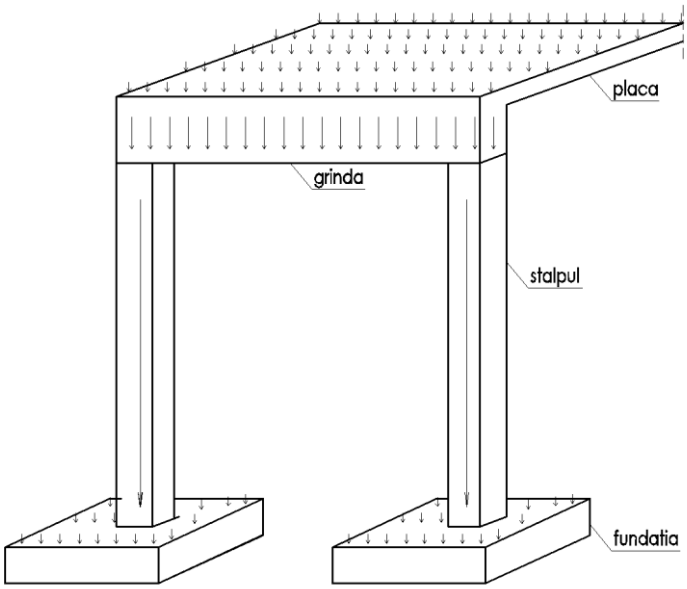


Figura 1.1 — Traseul încărcărilor într-o clădire cu structură în cadre: Placă → Grindă → Stâlp → Fundație → Teren de fundare

1.1.2 Funcțiile principale ale grinzilor

În cadrul unei structuri din beton armat, grinzile îndeplinesc simultan mai multe funcții.

a) Preluarea încărcărilor

Funcția principală a grinzii este preluarea încărcărilor distribuite sau concentrate provenite din elementele pe care le susține și transmiterea acestora către reazeme (stâlpi, pereți).

b) Asigurarea rigidității structurii

Prin rigiditatea lor la încovoiere și conlucrarea cu celelalte elemente (plăci, stâlpi, pereți structurali), grinzile contribuie la limitarea deplasărilor structurii și a deformării planșeelor, influențând comportarea globală a construcției.

c) Redistribuirea încărcărilor

Grinzile, prin capacitatea lor de deformare, pot conduce la o redistribuire a eforturilor între diferitele elemente structurale, contribuind la o utilizare mai eficientă a capacității portante a structurii.

1.2 Principii generale de proiectare la stări limită

SR EN 1992-1-1:2024, ca de altfel toate Eurocodurile referitoare la proiectarea structurilor, adoptă metoda stărilor limită ca bază a proiectării. Starea limită este o condiție dincolo de care o structură sau un element structural nu mai satisface cerințele de performanță pentru care a fost proiectat. Se deosebesc două categorii de stări limită.

Starea limită ultimă (SLU)

Conform SR EN 1990, SLU este asociată cu pierderea capacității portante a structurii sau a unui element structural:

- *cedarea prin rupere, deformații excesive*

- *pierderea echilibrului*

- *cedarea datorită oboselii sau altor efecte dependente de timp*

Depășirea unei stări limită ultime pune în pericol siguranța persoanelor și integritatea construcției, motiv pentru care verificările la SLU se fac cu un nivel de siguranță ridicat. Prezenta lucrare tratează exclusiv verificările la starea limită ultimă a grinzilor din beton armat din punctul de vedere al evitării ruperii secțiunii la încovoiere și forță tăietoare, luând însă în considerare și efectele ancorării și suprapunerii armăturilor.

Starea limită de serviciu (SLS)

SLS este asociată cu condițiile de exploatare normală a construcției: limitarea săgeților, controlul deschiderii fisurilor, limitarea vibrațiilor sau a eforturilor unitare. Depășirea unei stări limită de serviciu nu pune, în general, în pericol siguranța structurii, dar afectează confortul, aspectul sau durabilitatea acesteia. Verificările la SLS nu sunt tratate în mod extins în această lucrare, este prezentată însă verificarea simplificată a săgeții prin raportul deschidere/înălțime utilă, relevantă pentru grinzile din beton armat.

Metoda coeficienților parțiali

Verificarea la starea limită ultimă se face prin metoda coeficienților parțiali de siguranță. Această metodă constă în amplificarea acțiunilor (încărcărilor) și diminuarea rezistențelor materialelor, astfel încât să se acopere incertitudinile legate de variabilitatea încărcărilor, a proprietăților materialelor și a modelului de calcul. Condiția generală de verificare la SLU este:

$$E_d \leq R_d$$

unde E_d este valoarea de proiectare a efectului acțiunilor (de exemplu, momentul încovoietor sau forța tăietoare de proiectare), iar R_d este valoarea de proiectare a rezistenței (capacității portante) corespunzătoare.

Acțiunile de proiectare se obțin amplificând acțiunile caracteristice cu coeficienți parțiali $\gamma_F > 1$ (stabiliți în SR EN 1990 și SR EN 1991, nu fac obiectul acestei lucrări), iar rezistențele de calcul ale materialelor se obțin diminuând rezistențele caracteristice cu coeficienți parțiali de material γ_C (beton) și γ_S (oțel), prezentați în detaliu în capitolul 2.

1.3 Structura SR EN 1992-1-1:2024 și a Anexei Naționale SR EN 1992-1-1/NA:2025

SR EN 1992-1-1:2024 reprezintă versiunea română a standardului european EN 1992-1-1:2023 (Eurocod 2), parte a familiei de Eurocoduri structurale, alcătuită din:

- EN 1990 — Bazele proiectării structurilor
- EN 1991 — Acțiuni asupra structurilor
- EN 1992 — Proiectarea structurilor din beton
- EN 1993 — Proiectarea structurilor din oțel
- EN 1994 — Proiectarea structurilor compozite oțel-beton
- EN 1995 — Proiectarea structurilor din lemn
- EN 1996 — Proiectarea structurilor din zidărie
- EN 1997 — Proiectarea geotehnică
- EN 1998 — Proiectarea structurilor pentru rezistența la cutremur
- EN 1999 — Proiectarea structurilor din aluminiu

Ediția 2024 (bazată pe EN 1992-1-1:2023) reprezintă a doua generație a Eurocodului 2 și înlocuiește vechea versiune SR EN 1992-1-1:2004. Față de ediția anterioară, domeniul de aplicare a fost extins semnificativ: clase de beton până la C100/115 (față de C50/60 anterior), clase de oțel până la B700 și prevederi pentru oțel inoxidabil. Au fost de asemenea actualizate modelele de calcul la forfecare, ancorare și suprapunerea armăturilor.

Observație

Standardul precedent, SR EN 1992-1-1:2004, trebuie retras cel târziu până în martie 2028. Până atunci, cele două versiuni ale Eurocodului 2 pot coexista, dar rezultatele calculelor pot diferi între ele (de exemplu, modelul de calcul la forță tăietoare al ediției 2024 folosește efortul unitar de forfecare τ_{Ed}, spre deosebire de forța tăietoare V_{Ed} folosită în ediția 2004). Această lucrare este redactată conform SR EN 1992-1-1:2024 și Anexei Naționale SR EN 1992-1-1/NA:2025.

Structura pe capitole a standardului

SR EN 1992-1-1:2024 este organizat în 13 capitole și un set de anexe. Tabelul 1.1 prezintă capitolele relevante pentru tematica *acestei lucrări*; celelalte capitole (analiză structurală, precomprimare, stări limită de serviciu, oboseală, elemente prefabricate etc.) nu sunt tratate aici.

Capitol din această carte	Tema tratată	Capitolul din SR EN 1992-1-1:2024
Capitolul 2	Materiale	5
Capitolul 3	Durabilitate și acoperire cu beton	6
Capitolul 4	Încovoiere fără forță axială	8.1
Capitolul 5	Forfecare	8.2

Anexa Națională și parametrii determinați la nivel național (NDP)

Eurocodurile recunosc dreptul fiecărui stat membru de a stabili, prin anexa națională proprie, valorile anumitor parametri de siguranță — numiți parametri determinați la nivel național (NDP, din engleză national determined parameters) — acolo unde standardul european permite alegerea națională. Pentru România, aceste alegeri sunt stabilite prin SR EN 1992-1-1/NA:2025.

Anexa națională nu este un document de sine stătător: ea se utilizează numai împreună cu SR EN 1992-1-1:2024 și doar pentru construcții amplasate pe teritoriul României. Pentru majoritatea parametrilor (de exemplu, coeficienții parțiali de material γ_C și γ_S), Anexa Națională a României adoptă valorile recomandate de CEN; pentru câțiva parametri însă — precum modulul de elasticitate al betonului sau anumite condiții pentru poduri — Anexa Națională introduce valori sau completări specifice, care sunt semnalate explicit pe parcursul acestei lucrări.

Observație

Ori de câte ori un parametru diferă între valoarea recomandată de CEN (în corpul SR EN 1992-1-1:2024) și alegerea națională din SR EN 1992-1-1/NA:2025, se prezintă valoarea din Anexa Națională, obligatorie pentru proiectele din România, cu menționarea explicită a articolului NDP corespunzător.

CARACTERISTICILE MATERIALELOR UTILIZATE ÎN CALCULUL LA STAREA LIMITĂ ULTIMĂ

2.1 Introducere

Dimensionarea și verificarea elementelor din beton armat la starea limită ultimă se bazează pe proprietățile mecanice ale celor două materiale componente: betonul și oțelul pentru armături. Deși cele două materiale au comportări mecanice diferite, conlucrarea dintre ele, asigurată prin aderența dezvoltată la interfața beton–oțel, permite realizarea unor elemente structurale capabile să preia atât eforturi de compresiune, cât și eforturi de întindere.

În proiectarea conform SR EN 1992-1-1:2024, comportarea materialelor nu este descrisă prin curbele experimentale reale, ci prin modele simplificate de calcul, care reproduc cu suficientă precizie răspunsul mecanic al betonului și al oțelului în domeniul de interes pentru proiectare. Aceste modele permit deducerea relațiilor utilizate la dimensionarea și verificarea secțiunilor din beton armat, fără a afecta siguranța.

Pentru starea limită ultimă, rezistențele caracteristice ale materialelor (f_{ck} pentru beton, f_{yk} pentru oțel — valori cu o probabilitate de 5% de a nu fi atinse) se diminuează cu coeficienți parțiali de siguranță γ_C și γ_S, obținându-se rezistențele de calcul (de proiectare) f_{cd} și f_{yd} folosite efectiv în relațiile de dimensionare. Valorile acestor coeficienți, conform Tabelului 4.3 (NDP) din SR EN 1992-1-1:2024 și Anexei Naționale, sunt prezentate în Tabelul 2.1.

Situație de proiectare	γ_S (oțel)	γ_C (beton)	γ_V (forfecare fără armătură)
Persistentă și tranzitorie	1,15	1,50	1,40
Accidentală	1,00	1,15	1,15
Stare limită de serviciu	1,00	1,00	—

Tabelul 2.1 — Coeficienți parțiali pentru materiale. Anexa Națională a României adoptă valorile recomandate de CEN, fără modificări.

Situațiile de proiectare *persistentă și tranzitorie* corespund exploatării normale, respectiv fazelor tranzitorii (execuție, reparații); aceste valori (γ_C=1,50, γ_S=1,15) sunt cele folosite în toate exemplele de calcul din această lucrare, cu excepția cazului în care se precizează altfel.

2.2 Armătura

Greutatea specifică

Pentru calculul greutății proprii a elementelor din beton armat (utilizat, de exemplu, la evaluarea încărcărilor permanente ale unei grinzi), se poate adopta valoarea recomandată pentru greutatea specifică a armăturii:

$$\gamma_{oțel} \approx 78{,}5\ kN/m^3 \text{ sau } 7850\ \text{kg}/\ m^3$$

Tipuri de bare

Barele utilizate pentru armarea betonului pot avea suprafață netedă sau profilată. Barele cu profil periodic prezintă nervuri care îmbunătățesc aderența și permit o transmitere mai eficientă a eforturilor între beton și armătură. În România sunt întâlnite atât mărci tradiționale, precum OB37, PC52 și PC60, cât și clasele de armătură din sistemul european, precum B400–B700.

OB37 (bară netedă)	PC52 (bară cu profil periodic)	PC60 (bară cu profil periodic)	B400–B700 (bară cu profil periodic)
			
Bară netedă, fără nervuri. Aderență la beton numai prin frecare.	Bară cu profil periodic, cu nervuri transversale înclinate și nervuri longitudinale. Aderență ridicată la beton.	Bară cu profil periodic, cu nervuri transversale înclinate și nervuri longitudinale. Aderență ridicată la beton.	Bară cu profil periodic conform SR EN 10080. Nervuri transversale în două rânduri și nervuri longitudinale. Aderență ridicată la beton.

Notă:
- OB37 – oțel beton neted laminat la cald, conform SR 438-1:2012
- PC52, PC60 – oțel beton cu profil periodic, conform SR 438-1:2012
- B400–B700 – clase de rezistență ale oțelului pentru armături, cu profil periodic, conform SR EN 10080 și prevederilor naționale aplicabile (ex. ST 009)

Figura 2.1 — Tipuri de bare pentru armături utilizate în România

2.2.1 Clase de rezistență și clase de ductilitate

SR EN 1992-1-1:2024 se aplică armăturilor din oțel sudabil, profilate (cu nervuri) sau amprentate, sub formă de bare sau plase sudate, cu diametre $\phi \leq 50$ mm pentru bare profilate. Proprietățile specificate ale armăturii necesare pentru proiectare includ clasa de rezistență, clasa de ductilitate și diametrul nominal.

$\mathbf{f_{yk}}$ este limita de curgere caracteristică a armăturii — valoarea de referință care dă numele clasei (de exemplu, B500 are f_{yk}=500MPa). Este o valoare *caracteristică*, nu una de calcul: reprezintă pragul sub care se așteaptă să se situeze cel mult 5% din rezultatele testelor de producție (fractil 5%). Pentru efortul unitar folosit în calculele de dimensionare se aplică $f_{yd}=f_{yk}/\gamma_S$ (capitolul 2.1)

$\mathbf{k = (f_t/f_y)_k}$ — raportul dintre rezistența la întindere (ft) și limita de curgere (f_y), ambele caracteristice. Măsoară capacitatea de ecruisare a oțelului: cât de mult poate crește efortul unitar peste limita de curgere, înainte de rupere. Cu cât k este mai mare, cu atât bara este mai ductilă înainte de a ceda: se deformează

vizibil și continuă să preia efort suplimentar, nu cedează brusc. Acesta este motivul pentru care k crește de la clasa A (mai puțin ductilă, k=1,05) la clasa C (cea mai ductilă, k=1,15...1,35)

ε_{uk} — deformația specifică caracteristică la forța maximă, adică deformația atinsă chiar în punctul de rezistență maximă (f_t), înainte ca bara să înceapă să se gâtuie.

Ambii parametri, k și ε_{uk}, intervin direct în capitolul 4, la trasarea diagramei de calcul a armăturii (ramura înclinată 2a, care merge până la $\varepsilon_{ud}=\varepsilon_{uk}/\gamma_s$).

Clasă de rezistență	B400	B450	B500	B550	B600	B700
f_{yk} [MPa]	400	450	500	550	600	700

Tabelul 2.2 — Clase de rezistență ale armăturilor. Anexa Națională nu exclude niciuna dintre clase.

Clasă de ductilitate	A	B	C
$k = (f_t / f_y)_k$	1,05	1,08	1,15 ... 1,35
ε_{uk} (alungire la forță maximă)	2,5 %	5,0 %	7,5 %

Tabelul 2.3 — Clase de ductilitate ale armăturilor

Conform Anexei Naționale, armăturile de oțel utilizate pentru structuri din România trebuie să respecte mărcile și condițiile tehnice de calitate din SR 438-1 — pentru mărcile de tip B (B400C, B500C etc.) — sau, pentru mărcile românești tradiționale (OB37, PC52, PC60), condițiile din SR 438-1, prezentate în paragraful 2.2.3.

2.2.2 Diagrama de calcul efort unitar–deformație specifică

Calculul de rezistență se raportează la aria secțiunii transversale nominale a armăturii. *Rezistența de calcul* (de proiectare) a oțelului se obține din valoarea caracteristică f_{yk} prin relația:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_S}$$

Pentru modulul de elasticitate al oțelului se admite valoarea de proiectare E_s = 200 000 MPa, cu excepția cazului în care sunt cunoscute valori mai exacte. Deformația specifică de curgere de calcul rezultă din legea lui Hooke:

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s}$$

Pentru proiectare, se permite oricare dintre următoarele două ipoteze pentru ramura post-elastică a diagramei:

- **varianta a)** — ramură post-elastică înclinată, cu o deformație specifică limitată la $\varepsilon_{ud} \leq \varepsilon_{uk}/\gamma_S$ și un efort unitar maxim $k \cdot f_{yk}/\gamma_S$ la ε_{uk}, unde $k=(f_t/f_y)_k$ din Tabelul 2.3.
- **varianta b)** — ramură post-elastică orizontală (plastică perfectă), fără limită de deformație specifică.

În practica de calcul curentă a grinzilor la SLU (capitolele 4 și 5 ale acestei lucrări), se utilizează varianta b) — ramură orizontală, fără verificarea deformației specifice maxime a oțelului. Varianta a) devine relevantă atunci când este necesară o verificare explicită a ductilității secțiunii.

În figura 2.2 sunt calculate diagramele pentru o armătură cu clasa de rezistență 500 și clasa de ductilitate B utilizând coeficientul parțial de siguranță γ_S =1.15 :

$f_{yk} = 500\ N/mm^2$ (*sau MPa)* rezistența caracteristică a oțelului

$\varepsilon_{yk} = \frac{500}{200000} = 0.0025\ sau\ 2.5\ ‰$

$f_{yd} = \frac{500}{1.15} = 434.8\ N/mm^2$ rezistența de calcul la intrarea în curgere a oțelului

$\varepsilon_{yd} = \frac{434.5}{200000} = 0.00217\ sau\ 2.17\ ‰$ deformația la intrarea în curgere

$\varepsilon_{uk} = 5\%$ sau $50\ ‰$ $\quad \varepsilon_{ud} = \frac{50\ ‰}{1.15} = 43.5\ ‰$

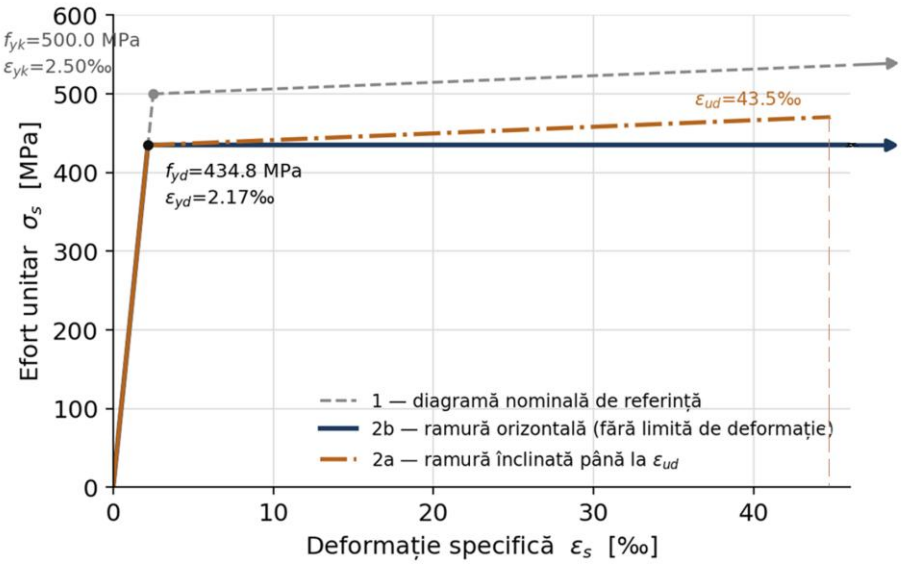


Figura 2.2 — Diagrama de calcul efort unitar–deformație specifică a armăturii calculată pentru B500B, clasă de ductilitate B.

2.2.3 Mărci de oțel utilizate anterior în România (informativ)

Înainte de introducerea claselor B400...B700, armătura pentru beton armat din România era produsă conform SR 438-1, sub mărcile OB37, PC52 și PC60. Deși aceste mărci nu mai corespund clasificării SR EN 1992-1-1:2024, ele pot fi întâlnite la expertizarea unor construcții existente, motiv pentru care sunt prezentate informativ în Tabelul 2.4, conform SR 438-1:2012.

Denumirile utilizate sunt:

OB = Oțel Beton (bară netedă, fără profil)

PC = bară cu profil periodic (bară cu nervuri). Cifra alăturată (37, 52, 60) indică, aproximativ, valoarea rezistenței caracteristice la întindere

R_{eH} — limita la care începe curgerea (cu valoarea superioară), măsurată direct pe diagrama efort-deformație, la mărcile de oțel care prezintă un palier de curgere

net (o cădere vizibilă a efortului chiar după atingerea limitei elastice) — cazul tipic al oțelurilor laminate la cald, precum OB37, PC52, PC60

$R_{p0,2}$ — limita de curgere convențională, la o deformație remanentă (plastică) de 0,2%, se folosește atunci când oțelul nu prezintă un palier de curgere net (comportare mai frecventă la oțelurile trase la rece)

R_m — rezistența la rupere (întindere), efortul unitar pe care bara îl poate prelua înainte de a se rupe — întotdeauna mai mare decât limita de curgere, diferența dintre ele fiind o măsură a rezervei de rezistență peste punctul de curgere

A_5 — alungirea la rupere, exprimată procentual, măsurată pe o lungime de referință egală cu 5 diametre ale epruvetei (de unde indicele "5") — o măsură directă a ductilității: cu cât A5 este mai mare, cu atât bara se deformează mai mult înainte de a se rupe.

Marcă	Diametru [mm]	R_{eH} sau $R_{p0,2min}$ [MPa]	$R_{m\ min}$ [MPa]	$A_{5\ min}$ [%]
OB37	6...12	255	360	25
OB37	14...40	235	360	25
PC52	6...14	355	510	20
PC52	16...28	345	510	20
PC52	32...40	335	510	20
PC60	6...12	420	590	16
PC60	14...28	405	590	16
PC60	32...40	395	590	16

Tabelul 2.4 — Caracteristici mecanice ale mărcilor de oțel OB37, PC52, PC60, conform SR 438-1:2012. Pentru PC60 se admite scăderea lui Rm până la minimum 560 MPa, cu condiția respectării limitei de curgere și a unei alungiri A5 ≥ 20%.

2.3 Betonul

2.3.1 Clase de rezistență

Rezistența la compresiune a betonului se indică prin clase de rezistență, definite prin rezistența caracteristică f_{ck} determinată pe cilindri, la vârsta de referință t_{ref} (în general 28 de zile). SR EN 1992-1-1:2024 extinde domeniul claselor de rezistență până la C100/115, față de limita C50/60 din ediția 2004.

	C12/ 15	C16/ 20	C20/ 25	C25/ 30	C30/ 37	C35/ 45	C40/ 50	C45/ 55	C50/ 60
f_{ck}	12	16	20	25	30	35	40	45	50
f_{cm}	20	24	28	33	38	43	48	53	58
f_{ctm}	1,6	1,9	2,2	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1
$f_{ctk;0,05}$	1,1	1,3	1,5	1,8	2,0	2,2	2,5	2,7	2,9

Tabelul 2.5 — Rezistențe caracteristice ale betonului [MPa] pentru clasele uzuale

Relațiile din Tabelul 2.5 sunt definite astfel:

$$f_{cm} = f_{ck} + 8\,MPa$$

$$f_{ctm} = 0{,}3{f_{ck}}^{2/3} \quad (pentru\ fck \leq 50\,MPa)$$

$$f_{ctk;0,05} = 0{,}7 f_{ctm} \quad (fractil\ de\ 5\%)$$

f_{ck} — rezistența caracteristică la compresiune uniaxială (fractil 5%, pe cilindru) — valoarea care dă numele clasei și care intră direct în toate formulele de calcul din această carte

f_{cm} — rezistența medie la compresiune, calculată convențional din f_{ck} ($f_{cm}=f_{ck}+8MPa$). Se folosește doar pentru a calcula alte proprietăți derivate (f_{ctm}, E_{cm})

f_{ctm} — rezistența medie la întindere axială. Intervine la calculul $A_{s,min}$ (capitolul 4)

$f_{ctk;0,05}$ — rezistența caracteristică la întindere (fractil 5%) este valoarea de bază pentru f_{ctd} (rezistența de calcul la întindere).

Notă — explicația denumirii din clasa betonului (ex. C25/30)?

Prima cifră (f_{ck}) este rezistența caracteristică determinată pe **cilindri standard** (diametru × înălțime = 150 × 300 mm) — valoarea de referință folosită în calculele de proiectare. A doua cifră este rezistența caracteristică echivalentă, determinată pe **cuburi standard** (cu latura 150mm), conform convenției de clasificare din EN 206. Epruveta cubică dă o valoare (aparent) mai mare decât cea cilindrică, din cauza geometriei diferite a epruvetei (efectul de confinare la capete, indus de frecarea cu platanele presei, influențează proporțional mai mult un cub scurt decât un cilindru mai înalt). Relația dintre cele două este, convențional, de aproximativ $f_{ck,cilindru} \approx 0{,}8 \times f_{ck,cub}$. În proiectare se folosește exclusiv prima cifră (f_{ck}, pe cilindru) — a doua apare doar pentru identificarea clasei și pentru compatibilitate cu rezultatele încercărilor pe cuburi, încă frecvente în controlul de șantier din România.

Încercarea de laborator vs. clasa de rezistență

Rezistența caracteristică f_{ck} nu este rezultatul unei singure încercări, ci o valoare statistică: fractilul de 5% al distribuției rezistențelor la compresiune, determinate pe epruvete cilindrice standardizate, încercate conform EN 206 la vârsta de referință t_{ref}. Cu alte cuvinte, cel mult 5% dintre rezultatele individuale de încercare, obținute pe un număr suficient de mare de epruvete, pot fi sub valoarea f_{ck}.

Un producător de beton, ca să garanteze o clasă (de ex. C25/30), trebuie să țintească o rezistență medie mai mare decât f_{ck}, pentru că f_{ck} e un prag statistic (fractil 5%). Producătorul își calculează astfel o rezistență medie țintă f_{cm}, din propriile date de fabricație (abaterea standard reală a stației de betoane: σ), folosind formula generală:

$$f_{ck} = f_{cm} - 1{,}48 \times \sigma$$

De exemplu, dacă pentru o producție C30/37 abaterea standard este σ=4 MPa, atunci media necesară pentru conformitate este aproximativ

$$f_{cm} \geq 30 + 1{,}48 \times 4 = 35.92 \text{ MPa}$$

Pe de altă parte, relația $f_{cm}=f_{ck}+8$MPa din Tabelul 2.5 este o convenție de proiectare folosită de EC2, aceeași pentru toate clasele și toți producătorii și nu trebuie confundată cu rezistența medie *țintă*, pe care un producător de beton o stabilește la fabricarea unei rețete, conform EN 206.

2.3.2 Modulul de elasticitate și coeficientul lui Poisson

Valoarea orientativă a modulului de elasticitate secant E_{cm} se estimează în funcție de rezistența medie f_{cm}: $E_{cm} = k_E \cdot {f_{cm}}^{1/3}$

Coeficientul k_E depinde de tipul agregatelor. Standardul european recomandă k_E=9500 pentru agregate cuarțoase, cu un domeniu de variație între 5000 și 13000 pentru alte agregate.

> **Anexa națională**
>
> Anexa Națională a României menține k_E=9500 pentru agregate cuarțoase, dar restrânge domeniul pentru alte agregate la 7500...12500 (față de 5000...13000 recomandat de CEN): valori mai reduse pentru agregate calcaroase și din gresie, respectiv valori majorate pentru agregatele bazaltice.

Coeficientul lui Poisson se poate considera 0,2 pentru betonul nefisurat și 0 pentru betonul fisurat la întindere.

Greutatea specifică

Pentru betonul obișnuit (cu agregate obișnuite, de masă volumică normală), Anexa Națională adoptă valorile recomandate:

$$\gamma_{beton\ armat} = 25 \frac{kN}{m^3} \ sau\ 2500 \ \frac{kg}{m^3}$$

$$\gamma_{beton\ simplu} = 24 \frac{kN}{m^3} \ sau\ \ 2400 \ \frac{kg}{m^3}$$

Valoarea de 25 kN/m³ (beton armat) se folosește la calculul greutății proprii a grinzilor și celorlalte elemente din beton armat — vezi Exercițiul 2.5.4.

2.3.3 Diagrama de calcul efort unitar–deformație specifică

Pentru modelarea răspunsului betonului la compresiune uniaxială de scurtă durată, SR EN 1992-1-1:2024 propune o relație neliniară de tip parabolă-rectangulară generalizată:

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta}, \text{ unde:}$$

$$k = 1{,}05\, E_{cm} \cdot \varepsilon_{c1} / f_{cm}$$

$$\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$$

$$\varepsilon_{c1}\,[‰] = 0{,}7 f_{cm}{}^{1/3} \leq 2{,}8\ ‰$$

$$\varepsilon_{cu1}\,[‰] = 2{,}8 + 14(1 - f_{cm}/108)^4 \leq 3{,}5\ ‰$$

Relația descrie comportarea materialului pentru analiză generală. Distribuția simplificată a eforturilor unitare folosită pentru dimensionarea secțiunilor la SLU (bloc rectangular de eforturi) este introdusă separat în capitolul 4 al acestei lucrări.

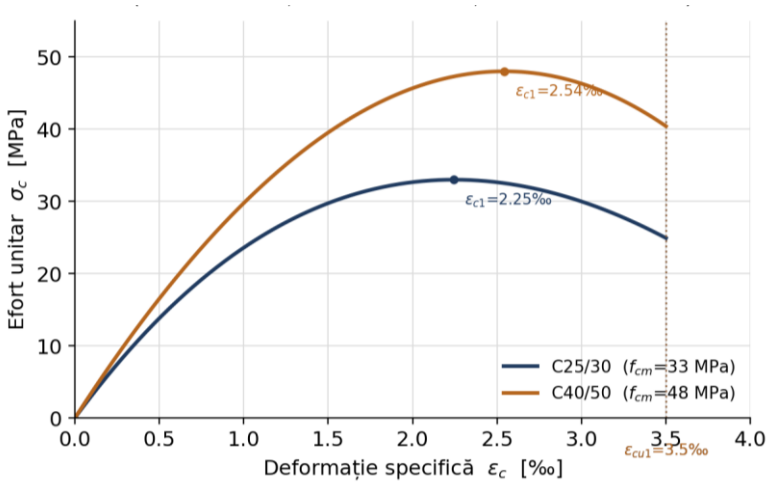


Figura 2.3 — Diagrama de calcul efort unitar–deformație specifică a betonului, pentru două clase de rezistență, trasate aplicând relația parabolă-rectangulară

2.3.4 Rezistențele de calcul (de proiectare) f_{cd} și f_{ctd}

Rezistența de proiectare la compresiune a betonului se calculează astfel:

$$f_{cd} = \eta_{cc} \cdot k_{tc} \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_C}$$

$$\eta_{cc} = \left(\frac{f_{ck,ref}}{f_{ck}}\right)^{1/3} \leq 1{,}0$$

$f_{ck,ref}$ = 40 MPa; deci η_{cc} = 1,0 pentru toate clasele uzuale $f_{ck} \leq 40$ MPa și scade ușor sub 1,0 pentru clase superioare.

Coeficientul k_{tc} ține cont de efectele de lungă durată și de intensitatea încărcării asupra rezistenței la compresiune:

- k_{tc} = 1,00 pentru $t_{ref} \leq 28$ zile (betoane CR, CN) sau $t_{ref} \leq 56$ zile (beton CS), când încărcarea de calcul nu se aplică la mai puțin de 3 luni după turnare
- k_{tc} = 0,85 pentru celelalte cazuri, inclusiv atunci când f_{ck} este înlocuit cu $f_{ck(t)}$

Anexa Națională a României adoptă, pentru grinzi și celelalte elemente de clădiri tratate în această lucrare, valorile recomandate de mai sus, fără modificări.

În mod analog, rezistența de proiectare la întindere se calculează cu:

$$f_{ctd} = k_{tt} \cdot \frac{f_{ctk,0,05}}{\gamma_C}$$

Anexa Națională adoptă valorile recomandate: k_{tt} = 0,80 pentru $t_{ref} \leq 28$ zile (CR, CN) / ≤ 56 zile (CS); ktt = 0,70 pentru celelalte cazuri.

Pentru exemplul folosit frecvent în această lucrare — beton C25/30, încărcare aplicată după 3 luni — rezultă:

$$f_{cd} = 1{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot \frac{25}{1{,}50} = 16{,}667\ MPa$$

2.4 Acțiunea compozită oțel-beton

Funcționarea grinzii din beton armat ca element compozit, capabil să preia atât eforturi de compresiune prin beton, cât și eforturi de întindere prin armătură, depinde de conlucrarea dintre cele două materiale.

Conlucrarea este posibilă în principal datorită *aderenței dintre beton și armătură* și a *compatibilității deformațiilor celor două materiale (mecanice și termice)*.

a. Aderența dintre beton și armătură

Transmiterea eforturilor de la beton la armătură și invers se realizează prin eforturi unitare tangențiale de aderență dezvoltate la interfața dintre bară și beton. În cazul barelor cu nervuri, transferul eforturilor se realizează printr-o combinație de:

- aderență fizico-chimică
- frecare
- împănare mecanică datorată nervurilor barei.

Datorită acestei conlucrări, oțelul și betonul din vecinătatea armăturii pot participa împreună la preluarea solicitărilor.

Mediul alcalin al betonului formează, în plus, un strat pasiv protector pe suprafața oțelului, care întârzie coroziunea armăturii cât timp betonul de acoperire își păstrează integritatea și alcalinitatea.

b. Compatibilitatea deformațiilor mecanice

Aderența dintre beton și oțel face ca, în zonele în care există o conlucrare corespunzătoare, deformațiile celor două materiale să fie compatibile.

Aceasta este o idee fundamentală pentru calculul betonului armat. De exemplu, într-o secțiune de grindă solicitată la încovoiere, armătura longitudinală și betonul din jurul ei au, în ipoteza de conlucrare perfectă, aceeași deformație specifică longitudinală la nivelul la care sunt situate.

Astfel, atunci când betonul din zona întinsă fisurează, eforturile de întindere sunt transferate către armătură prin aderență, iar armătura poate prelua o parte importantă din eforturile care nu mai pot fi preluate de betonul fisurat.

Această compatibilitate a deformațiilor stă la baza ipotezelor utilizate ulterior la calculul secțiunilor din beton armat la încovoiere.

3. Compatibilitatea deformațiilor termice

Coeficienții de dilatare termică ai betonului și oțelului sunt apropiați: această apropiere este favorabilă conlucrării celor două materiale și limitează eforturile interne generate de variațiile de temperatură.

Coeficienții de dilatare termică ai celor două materiale sunt:

$\alpha_{c,th} \approx 10 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$ pentru beton

$\alpha_{s,th} \approx 10 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$ pentru oțel

2.5 Exerciții rezolvate

Următoarele exerciții folosesc exclusiv relațiile și valorile prezentate în acest capitol.

Exercițiul 2.5.1 — Rezistențe de calcul și modul de elasticitate

O grindă din beton armat urmează să fie executată din beton C30/37, beton cu întărire normală, determinată la tref=28 zile. Elementul se consideră încărcat în două variante: varianta (a) la o vârstă de aproximativ 4 luni de la turnare; varianta (b) la o vârstă de aproximativ 2 luni de la turnare. Agregatele folosite sunt cuarțoase. Determinați rezistențele de calcul f_{cd} și f_{ctd} și modulul de elasticitate E_{cm}.

Varianta (a)

Coeficienții de lungă durată și de intensitate

Vârsta determinării rezistenței este tref=28 zile, iar betonul este încărcat la 4 luni (> 3 luni) rezultă:

k_{tc}=1; k_{tt}=0.80

Factorul de ajustare a rezistenței

$f_{ck,ref}$ = 40 MPa

$\eta_{cc} = \left(\frac{40}{30}\right)^{1/3} = 1.1 \leq 1{,}0$, deci $\eta_{cc} = 1$

Rezistențele de calcul

$$f_{cd} = 1{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot \frac{30}{1{,}50} = 20\ MPa$$

$$f_{ctd} = 0{,}80 \cdot \frac{2{,}0}{1{,}50} = 1{,}066\ MPa$$

Modulul de elasticitate

$E_{cm} = 9500 \cdot 38^{1/3}$= 31 934 MPa

Varianta (b)

Coeficienții de lunga durata, intensitate

Vârsta determinării rezistenței este tref=28 zile, iar betonul este încărcat la 2 luni (< 3 luni) rezultă:

k_{tc}=0,85; k_{tt}=0,70

Factorul de ajustare a rezistenței

$f_{ck,ref}$ = 40 MPa

$\eta_{cc} = \left(\frac{40}{30}\right)^{1/3} = 1.1 \leq 1{,}0$, deci $\eta_{cc} = 1$

Rezistențele de calcul

$$f_{cd} = 1{,}0 \cdot 0{,}85 \cdot \frac{30}{1{,}50} = 17\ MPa$$

$$f_{ctd} = 0{,}70 \cdot \frac{2{,}0}{1{,}50} = 0{,}933\ MPa$$

Exercițiul 2.5.2 — Corelarea rezultatelor pe epruvete cu clasa de rezistență

Pe 3 cilindri prelevați din aceeași șarjă de beton, la un șantier, s-a obținut o rezistență medie la compresiune de 32 MPa. Cu ce clasă de beton este compatibilă această valoare? Ce precauție trebuie avută în vedere înainte de a considera acest rezultat drept clasificare oficială a betonului?

$f_{cm} = f_{ck} + 8$ MPa, rezultă $f_{ck} = 32 - 8 = 24$ MPa

Valoarea calculată nu corespunde unei clase standard. Comparând direct rezistența medie obținută (32 MPa) cu valorile f_{cm} din Tabelul 2.5:

- clasa C20/25 necesită $f_{cm} \geq 28$ MPa → 32 MPa ≥ 28 MPa ⇒ compatibilă
- clasa C25/30 necesită $f_{cm} \geq 33$ MPa → 32 MPa < 33 MPa ⇒ NU este atinsă

Rezultatul de 32 MPa este deci compatibil cu clasa C20/25, dar insuficient pentru C25/30.

Observație: această comparație este strict orientativă. Clasificarea oficială a unui lot de beton se face conform EN 206, pe baza unui număr minim de rezultate obținute pe o perioadă de producție determinată și a unor criterii statistice care implică atât media, cât și cea mai mică valoare individuală.

Exercițiul 2.5.3 — Deformația elastică a betonului

Un stâlp din beton simplu (nearmat), cu înălțimea de 1,00 m și clasă C25/30, este solicitat axial (fără deformații laterale) de un efort unitar de compresiune egal cu 30% din f_{ck}. Calculați deformația specifică ε_c și scurtarea totală a stâlpului, folosind modulul de elasticitate E_{cm} (agregate cuarțoase).

Efortul unitar de compresiune (C25/30: f_{ck}=25 MPa):

$$\sigma_c = 0{,}30 \cdot f_{ck} = 0{,}30 \cdot 25 = 7{,}5\ MPa$$

Modulul de elasticitate (f_{cm}=25+8=33 MPa, agregate cuarțoase, k_E=9500):

$$E_{cm} = 9500 \cdot 33^{1/3} = 9500 \cdot 3{,}207 \approx 30\,470\ MPa$$

Deformația specifică elastică (legea lui Hooke, $\varepsilon_c=\sigma_c/E_{cm}$; punct situat sub 0,4fcm=13,2 MPa, deci în domeniul elastic, de valabilitate a lui Ecm):

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_{cm}} = \frac{7{,}5}{30\,470} \approx 0{,}246\ ‰$$

Scurtarea totală a stâlpului (L=1,00 m=1000 mm):

$$\Delta L = \varepsilon_c \cdot L = 0{,}000246 \cdot 1000 \approx 0{,}246\ mm$$

Deformația este extrem de mică (sub un sfert de milimetru la 1 m înălțime) — ilustrează rigiditatea ridicată a betonului în domeniul elastic, la eforturi uzuale de exploatare.

Exercițiul 2.5.4 — Greutatea proprie a unei grinzi

O grindă din beton armat are secțiunea dreptunghiulară b×h = 300×600 mm. Calculați greutatea proprie a grinzii pe metru liniar, folosind greutatea specifică a betonului armat.

Aria secțiunii transversale și greutatea proprie pe metru liniar (greutate specifică beton armat = 25 kN/m³):

$$A = b \cdot h = 0{,}30 \cdot 0{,}60 = 0{,}18\, m^2$$

$$g = \gamma_{beton\ armat} \cdot A = 25 \cdot 0{,}18 = 4{,}50\, kN/m$$

Această greutate proprie se însumează cu celelalte încărcări permanente și utile pentru obținerea încărcării totale de calcul a grinzii.

Exercițiul 2.5.5 — Alungirea armăturii

Alungirea armăturii pe cele trei clase de ductilitate. O bară de oțel B500, cu lungimea inițială de 1,00 m, este întinsă până la deformația specifică ultimă de calcul εud (varianta a din art. 5.2.4(2), γ_S=1,15). Calculați ε_{ud} și alungirea totală a barei pentru fiecare dintre clasele de ductilitate A, B și C.

Rezultatele sunt date în tabelul următor și se bazează pe relațiile de calcul:

- deformația specifică ultimă de calcul $\varepsilon_{ud} = \varepsilon_{uk}/\gamma_S$; γ_S=1,15
- alungirea corespunzătoare a barei (L=1,00 m=1000 mm), $\Delta l = \varepsilon_{ud} \cdot L$

Clasă de ductilitate	ε_{uk}	$\varepsilon_{ud} = \varepsilon_{uk}/\gamma_S$	Alungire Δl pe L=1 m
A	2,5 %	2,174 % (21,74 ‰)	21,74 mm
B	5,0 %	4,348 % (43,48 ‰)	43,48 mm
C	7,5 %	6,522 % (65,22 ‰)	65,22 mm

Notă: o bară din clasa C poate, teoretic, să se alungească de trei ori mai mult decât una din clasa A înainte de a atinge deformația specifică limită de calcul — motiv pentru care clasa de ductilitate este relevantă în special în zonele seismice, unde se cere o capacitate mare de deformare plastică a elementelor structurale.

Exercițiul 2.5.6 — Dilatare termică

O grindă din beton armat (C25/30, B500) cu lungimea L=5,00m este supusă unei variații de temperatură ΔT=30°C (diferență sezonieră/de execuție).

Calculați: (a) alungirea/scurtarea grinzii în varianta simplu rezemată (grinda este liberă să se deplaseze); (b) efortul de întindere/compresiune în grindă (beton/armătură) dacă deplasarea grinzii este împiedicată, și comparați-l cu efortul maxim al fiecărui material; (c) care este explicația pentru care, deși efortul de întindere în beton la deplasare împiedicată depășește rezistența la întindere, grinda nu cedează.

(a) Alungirea liberă

$$\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L = 10 \cdot 10^{-6} \times 30 \times 5000\,mm = 1{,}5\,mm$$

O grindă simplu rezemată este static determinată: un reazem permite deplasarea orizontală liberă. Grinda se poate alungi neîmpiedicat, deci dilatarea termică nu produce niciun efort unitar, doar o deplasare geometrică.

(b) Efortul la deplasare împiedicată

Deoarece $\alpha_c \approx \alpha_s$ (capitolul 2.4), efortul din fiecare material se calculează independent, fără secțiune echivalentă:

$\sigma = E \cdot \alpha \cdot \Delta T$

$\sigma_s = 200000 \times 10 \cdot 10^{-6} \times 30 = 60{,}0\,MPa \quad (oțel)$

$\sigma_c = 30472 \times 10 \cdot 10^{-6} \times 30 = 9{,}14\,MPa \quad (beton)$

$E_s = 200\,000\,MPa$

$E_{cm} = 9500 \cdot 33^{1/3} = 30\,472\,MPa$

Comparație cu efortul maxim real al fiecărui material:

Material	σ calculat	Efort maxim real	% din efortul maxim
Oțel	60,0 MPa	f_{yk} = 500 MPa	12%
Beton	9,14 MPa	fctm = 2,6 MPa	352% (de 3,52 ori mai mult)

Oțelul folosește doar 12% din capacitatea lui reală. Betonul, în schimb, ar trebui să dezvolte un efort de 3,52 ori mai mare decât rezistența lui reală la întindere — fizic nu este posibil.

(c) De ce nu cedează grinda?

Calculul de la (b) presupune un beton perfect elastic. În realitate, betonul fisurează exact când efortul de întindere atinge f_{ctm}, adică la o variație de temperatură de doar $\Delta T \approx f_{ctm}/(E_{cm} \cdot \alpha) \approx 9{,}5°C$, mult sub cele 30°C din enunț. Din acel moment, betonul fisurat nu mai poate prelua întindere în acea secțiune, rezultând mecanismul studiat la încovoiere (capitolul 4) și la armătura minimă ($A_{s,min}$): forța suplimentară se redistribuie automat către armătură, care are, așa cum am văzut la (b), o rezervă mare de capacitate (doar 12% folosită). Practic, fisurarea betonului este chiar mecanismul care „salvează” grinda de la cedare.

Notă

Pentru variații de temperatură lente, sezoniere (fără un șoc termic), curgerea lentă a betonului relaxează suplimentar aceste eforturi în timp.

DURABILITATEA ȘI ACOPERIREA CU BETON A ARMĂTURII

3.1 Introducere

O grindă corect dimensionată la încovoiere și forță tăietoare trebuie, de asemenea, să fie protejată corespunzător împotriva acțiunii mediului înconjurător. În caz contrar, în timp, armătura se poate coroda, ceea ce poate duce la reducerea secțiunii barelor și, implicit, la diminuarea capacității portante a elementului. De aceea, **durabilitatea reprezintă o cerință esențială a proiectării**, alături de verificarea siguranței structurale și a comportării în exploatare. SR EN 1992-1-1:2024 include cerințe specifice privind durabilitatea, astfel încât elementul să își poată îndeplini funcția pe întreaga durată de viață proiectată. Stratul de acoperire a armăturii cu beton (acoperirea cu beton) îndeplinește practic trei funcții simultan:

- **protecție împotriva coroziunii** — betonul, prin alcalinitatea sa (pH ridicat, de regulă peste 12,5), formează pe suprafața oțelului un strat pasiv protector. Acest strat rămâne stabil atât timp cât, de exemplu, carbonatarea sau pătrunderea clorurilor nu ajunge la nivelul armăturii.
- **transmiterea aderenței** — o grosime minimă de beton în jurul barei este necesară pentru ca eforturile de să se poată dezvolta fără despicarea betonului din jurul barei.
- **rezistență la foc** — stratul de beton dintre suprafața expusă și armătură întârzie încălzirea oțelului peste temperatura la care acesta își pierde o parte semnificativă din rezistență (verificarea explicită la foc face obiectul unui alt standard - SR EN 1992-1-2, neabordat în această lucrare).

Mecanisme care conduc la coroziune

Coroziunea prin carbonatare: dioxidul de carbon din aer difuzează treptat în porii betonului și reacționează cu hidroxidul de calciu, formând carbonat de calciu și reducând pH-ul betonului. Când frontul de carbonatare ajunge la nivelul armăturii, stratul pasiv protector se distruge și coroziunea poate începe, dacă există și umiditate și oxigen suficiente. Viteza de carbonatare depinde de compactitatea betonului (raport apă/ciment, grad de compactare, tratare) — de aceea clasele XRC din secțiunea 3.5 exprimă tocmai această viteză.

Coroziunea prin cloruri: ionii de clor (din apa de mare, din sărurile de dezghețare sau din alte surse) pătrund prin porii betonului și, la o concentrație suficientă la nivelul armăturii, distrug local stratul pasiv, chiar dacă restul betonului rămâne alcalin. Coroziunea rezultată este localizată (coroziune prin ciupituri, engleză pitting corrosion) și poate fi mai periculoasă decât cea prin carbonatare, deoarece reduce brusc secțiunea barei într-un punct, fără semne vizibile la suprafața betonului.

3.2 Clase de expunere

Pe lângă coroziunea armăturii, betonul însuși poate fi degradat direct de mediu: prin cicluri repetate de îngheț-dezgheț (mai ales în prezența agenților de dezghețare), prin atac chimic din partea solurilor sau apelor subterane agresive, sau prin abraziune mecanică. Aceste forme de atac nu se rezolvă prin mărirea acoperirii cu beton, ci prin compoziția betonului (clasă de rezistență, tip de ciment, aditivi) — motiv pentru care nu fac obiectul tabelelor de acoperire minimă prezentate în acest capitol.

Clasele de expunere descriu condițiile de mediu la care este supusă o suprafață de beton — nu structura în ansamblu. Este perfect posibil ca fața inferioară a unei grinzi (la interior, uscată) să aibă o clasă de expunere diferită de un capăt al aceleiași grinzi aflat lângă un rost deschis spre exterior. Tabelul 3.1 rezumă clasele definite în SR EN 1992-1-1:2024.

Clasă	Fenomen	Descriere / exemplu tipic pentru clădiri
X0	Fără risc	Beton simplu, fără armătură, sau armat dar complet uscat și fără risc de îngheț
XC1	Carbonatare	Uscat sau permanent umed — beton interior în încăperi cu umiditate redusă
XC2	Carbonatare	Umed, rareori uscat — fundații, elemente în contact îndelungat cu apa
XC3	Carbonatare	Umiditate moderată — beton interior cu umiditate medie/ridicată; exterior ferit de ploaie
XC4	Carbonatare	Alternanță umed-uscat — beton exterior expus direct ploii (fațade, pereți exteriori)
XD1-XD3	Cloruri (altele decât apa de mare)	Beton expus la săruri de dezghețare — parcări, rampe, structuri rutiere
XS1-XS3	Cloruri din apa de mare	Structuri în zone litorale sau marine
XF1-XF4	Îngheț-dezgheț	Beton exterior expus la cicluri de îngheț, cu sau fără agenți de dezghețare
XA1-XA3	Atac chimic	Beton în contact cu soluri sau ape subterane agresive chimic
XM1-XM3	Abraziune	Pardoseli industriale, suprafețe circulate de vehicule

Tabelul 3.1 — Clase de expunere (rezumat). Pentru grinzile unei clădiri obișnuite, clasele relevante sunt aproape întotdeauna din familia XC (carbonatare); XD, XS, XF, XA, XM devin relevante pentru garaje, parcaje, structuri exterioare sau industriale.

3.3 Acoperirea minimă, c_{min} și clase de rezistență beton

Anexa P versus sistemul ERC

SR EN 1992-1-1:2024 introduce, ca metodă principală, un sistem nou bazat pe clase de rezistență la expunere (ERC — XRC pentru carbonatare, XRDS pentru cloruri), determinate experimental pentru betonul folosit efectiv, conform EN 206. Anexa Națională SR EN 1992-1-1/NA:2025 alege explicit acest sistem („Se aplică utilizarea ERC în conformitate cu 6.4"). Standardul păstrează însă, în Anexa P (informativă), o abordare alternativă, aproape identică cu cea din SR EN 1992-1-1:2004: acoperirea minimă se determină pe baza clasei structurale (S1...S6) a elementului, fără a fi nevoie de o clasă ERC declarată de producătorul de beton. Această lucrare folosește Anexa P, pentru compatibilitate cu practica de proiectare curentă. Însă, exclusiv în secțiunea 3.5, se prezintă Determinarea acoperirii conform sistemului ERC (art. 6.4) cu exemple de calcul.

Valoarea de proiectare c_{min} trebuie să satisfacă simultan cerințele de durabilitate $c_{min,dur}$ și de aderență $c_{min,b}$

$$c_{min} = max\{c_{min,b}\ ;\ c_{min,dur} + \Delta c_{dur,\gamma} - \Delta c_{dur,st} - \Delta c_{dur,add}\ ;\ 10\,mm\}$$

Cei trei termeni Δ au, în absența unor specificații speciale de proiect, valoarea recomandată 0 mm, deci pentru o grindă obișnuită de clădire, cu armătură din oțel carbon (nu inoxidabil) și fără protecții suplimentare, formula se reduce practic la c_{min}=max{$c_{min,b}$; $c_{min,dur}$; 10 mm}. Semnificația lor, pe scurt:

- $\Delta c_{dur,\gamma}$ — marjă suplimentară de siguranță, atunci când proiectul o cere explicit (valoare recomandată 0 mm);
- $\Delta c_{dur,st}$ — reducere permisă la utilizarea oțelului inoxidabil sau a altor măsuri speciale (valoare recomandată 0 mm);
- $\Delta c_{dur,add}$ — reducere permisă atunci când betonul are o protecție suplimentară dovedită, de exemplu un strat de acoperire (valoare recomandată 0 mm).

Acoperirea minimă pentru durabilitate $c_{min,dur}$

Ideea Anexei P este să lege acoperirea minimă de o clasă structurală S1...S6 (Tabelul 3.2). Clasele S1...S6 nu au o semnificație fizică proprie, dar leagă direct de acoperirea minimă necesară ($c_{min,dur}$, Tabelul 3.4): cu cât clasa e mai mare (spre S6), cu atât $c_{min,dur}$ cerut e mai mare. Punctul de plecare pentru orice element obișnuit este clasa recomandată S4 (durată de viață 50 ani, fără condiții speciale). Pornind de la clasa S4, cei patru factori din Tabelul 3.3 modifică clasa în sus (protecție mai mare necesară) sau în jos (protecție mai mică, suficientă).

Clasă	Descriere
S1	Protecție minimă — toate cele trei reduceri aplicate simultan față de S4 (beton de rezistență superioară + element tip placă + control special de execuție). ex. S4-3=S1
S2 – S3	Situații intermediare — una sau două dintre reducerile de mai sus aplicate față de cazul obișnuit
S4	Cazul obișnuit — clădire uzuală, durată de viață proiectată 50 ani, fără condiții speciale de execuție sau de formă a elementului. Este clasa implicită folosită în exemplele acestei lucrări
S5	Puțin peste cazul obișnuit — de regulă, o combinație care include o majorare parțială
S6	Protecție maximă — durată de viață proiectată lungă (100 ani), fără nicio reducere aplicabilă

Tabelul 3.2 — Clase structurale S1...S6 și semnificația lor practică

Criteriu de modificare	Efect asupra clasei structurale	Exemple de clasă efectivă, pornind de la S4
Durata de viață proiectată de 100 de ani (față de 50 de ani)	majorare cu 2 clase	S4 + 2 = S6
Clasa de rezistență a betonului aleasă este: **X0 și XC1**: ≥C30/37 **XC2/XC3**: ≥C35/45 **XC4, XD1 și XD2/XS1**: ≥C40/50 **XD3/XS2/XS3**: ≥C45/55	reducere cu 1 clasă	S4 − 1 = S3
Element asimilabil unei plăci (poziția armăturii nu este afectată de execuție)	reducere cu 1 clasă	S4 − 1 = S3
Control special al calității de producție a betonului	reducere cu 1 clasă	S4 − 1 = S3

Tabelul 3.3 — Modificări ale clasei structurale

Odată stabilită clasa structurală, $c_{min,dur}$ se preia direct din Tabelul 3.4, în funcție de clasa de expunere.

Clasă structurală	X0	XC1	XC2/XC3	XC4	XD1/XS1	XD2/XS2	XD3/XS3
S1	10	10	10	15	20	25	30
S2	10	10	15	20	25	30	35
S3	10	10	20	25	30	35	40
S4	10	15	25	30	35	40	45
S5	15	20	30	35	40	45	50
S6	20	25	35	40	45	50	55

Tabelul 3.4 — $c_{min,dur}$ [mm] pentru armătura din oțel carbon, în funcție de clasa structurală și clasa de expunere.

Clase de rezistență minime orientative pentru durabilitate

Clasa de beton adoptată trebuie să îndeplinească atât cerințele de rezistență rezultate din calculul structural, cât și cerințele de durabilitate corespunzătoare condițiilor de expunere. Cerințele privind betonul destinat diferitelor clase de expunere se stabilesc conform SR EN 206-1:2026 și prevederilor naționale aplicabile.

În exemplele și aplicațiile prezentate în această carte sunt utilizate, în scop didactic, clase minime orientative de beton pentru diferitele clase de expunere din Anexa P a SR EN 1992-1-1:2024. Valorile au rol orientativ pentru aplicațiile prezentate și nu înlocuiesc verificarea cerințelor de durabilitate prevăzute de reglementările în vigoare pentru un proiect real

X0	XC1	XC2	XC3	XC4	XD1	XD2/XS1	XD3/XS2	XS3
C12/15	C20/25	C25/30	C30/37	C30/37	C30/37	C30/37	C35/45	C35/45

Tabelul 3.5 — Clase de rezistență orientative minime pentru durabilitate, conform Anexei P a SR EN 1992-1-1:2024.

Acoperirea minimă pentru aderență $c_{min,b}$

Indiferent de condițiile de mediu, acoperirea trebuie să fie și suficientă pentru transmiterea eforturilor de aderență și pentru o compactare corectă a betonului în jurul barei:

Tip de armătură	$c_{min,b}$
Bară individuală	diametrul barei, ϕ
Pachet de bare (max. 3-4 bare în contact)	diametrul echivalent ϕ_b

Tabelul 3.6 — Acoperire minimă $c_{min,b}$, Tabelul 6.5. Dacă dimensiunea maximă a agregatului D_{upper} depășește 32 mm, $c_{min,b}$ se majorează cu 5 mm.

3.4 Acoperirea nominală c_{nom} și reguli practice de alegere

Acoperirea folosită efectiv în proiectare (cea indicată pe planuri) este acoperirea nominală, obținută majorând c_{min} cu o toleranță de execuție Δc_{dev}, care ține cont de faptul că, pe șantier, poziția reală a armăturii poate devia ușor de la cea din proiect:

$$c_{nom} = c_{min} + \Delta c_{dev}$$

Anexa Națională a României înlocuiește integral tabelul de valori Δc_{dev} cu un tabel propriu (Tabelul 6.7 RO), foarte apropiat de cel recomandat de CEN, cu o singură adăugire (plăci din beton armat). Cazurile relevante pentru grinzi sunt:

Caz	Δcdev
General — execuție clasa de toleranță 1 (EN 13670)	10 mm
Execuție clasa de toleranță 2, sau producție cu sistem de asigurare a calității care măsoară sistematic acoperirea	5 mm
Elemente în clasa de expunere XC1 (risc de coroziune nesemnificativ)	5 mm

Tabelul 3.7 — Toleranțe conform cu Anexa Națională. În lipsa unor informații suplimentare despre clasa de toleranță a execuției, se folosește valoarea generală de 10 mm — aceasta este și valoarea folosită implicit în exemplele din această lucrare.

Deoarece o grindă are simultan armătură longitudinală (ϕ_{sl}) și etrieri (ϕ_{sw}), iar etrierii înconjoară armătura longitudinală, se calculează separat acoperirea nominală a fiecăreia:

- $c_{nom,sl}$ pentru armătura longitudinală
- $c_{nom,sw}$ pentru etrieri (mai mică, etrierul este mai aproape de suprafața betonului).

Figura 3.1 arată poziția celor două acoperiri pe un detaliu al unei secțiuni transversale, iar Figura 3.2 detaliază secțiunea transversală tipică a unei grinzi cu armăturile aferente (întinderea grinzii la partea inferioară).

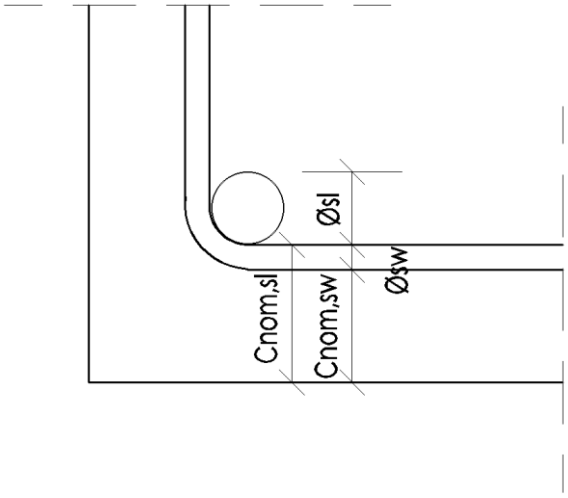


Figura 3.1 — Detaliu de colț al unei secțiuni transversale prin grindă: relația dintre $c_{nom,sw}$, $c_{nom,sl}$, Φ_{sw}, Φ_{sl}

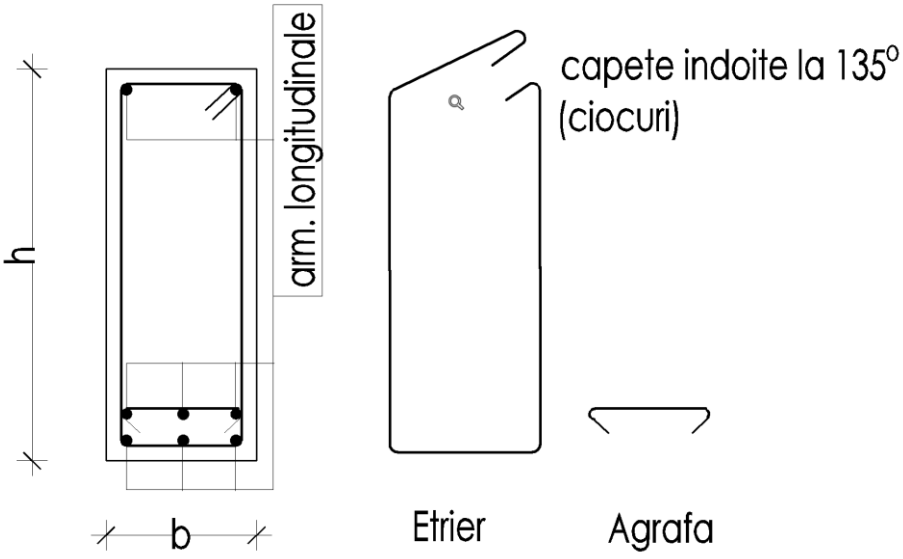


Figura 3.2 — Armăturile într-o secțiune transversală: etrier (închide toată secțiunea) și agrafă (leagă o bară intermediară)

Recomandare practică

La alegerea valorilor finale (rotunjite) pentru $c_{nom,sl}$ și $c_{nom,sw}$, este utilă respectarea a două reguli constructive, folosite curent în proiectare:

(1) $\mathbf{c_{nom,sw}}$ se alege multiplu de **5 mm**, pentru a respecta dimensiunile disponibile ale distanțierilor din comerț

(2) diferența $\mathbf{c_{nom,sl} - c_{nom,sw} = \phi_{sw}}$ trebuie să reflecte faptul că armătura longitudinală este așezată chiar în interiorul etrierului, sau scris altfel $\mathbf{c_{nom,sl} = c_{nom,sw} + \phi_{sw}}$. Dacă valoarea $c_{nom,sl}$ calculată teoretic (din durabilitate/aderență) rezultă mai mică decât $c_{nom,sw}+\phi_{sw}$, se adoptă aceasta din urmă. Vezi exemplele de la finalul acestui capitol.

3.5 Determinarea acoperirii conform sistemului ERC

Secțiunile 3.3-3.4 au folosit Anexa P, metoda alternativă bazată pe clase structurale (S1...S6), pentru compatibilitate cu practica de proiectare curentă din România. Metoda de referință a SR EN 1992-1-1:2024, aleasă explicit de Anexa Națională pentru art. 6.4, este însă sistemul ERC (clase de rezistență la expunere) — de aceea, această secțiune arată, pe un exemplu numeric, cum se face calculul pe ERC și dacă rezultatul diferă.

Diferența esențială față de Anexa P: în loc de o clasă structurală (S1...S6), determinată din durata de viață și câțiva factori de influență generali, ERC cere o clasă de rezistență la expunere specifică betonului folosit efectiv — XRC pentru coroziunea prin carbonatare, XRDS pentru coroziunea prin cloruri — determinată conform EN 206, pe baza performanței reale, testate, a rețetei de beton (nu doar a clasei de rezistență f_{ck}). Această clasă trebuie declarată de producătorul de beton sau dovedită prin încercări. Dacă nu este disponibilă, Anexa P rămâne o alternativă practică validă.

ERC (clasa XRC)	$c_{min,dur}$ — XC1, 50 ani
XRC 0,5 ... XRC 4	10 mm
XRC 5 ... XRC 7	15 mm

Tabelul 3.8 — Acoperirea minimă pentru durabilitate conform sistemului ERC, pentru clasa de expunere XC1

Exemplul 3.5.1 — Acoperirea utilizând sistemul ERC

Care este acoperirea cu beton pentru o grindă situată la interiorul unei clădiri, având datele enumerate mai jos? Calculul se face utilizând sistemul ERC și se compară rezultatele cu cele obținute utilizând Anexa P (vezi Exemplul 3.6.2).

- *diametrele estimate ale armăturilor $\varphi s_{l,est}$=25mm, $\varphi s_{w,est}$=10mm*
- *agregate cu diametrul D_{upper}=16mm (<32mm)*
- *clasa de expunere XC1*
- *toleranța de execuție, Δc_{dev}=5 mm (se consideră control al execuției)*

Se consideră doi producători ipotetici de beton, cu performanțe ERC diferite:

Varianta a) beton cu clasa XRC 5 (performanță obișnuită**)**

$c_{min,dur} = 15\ mm$

$c_{min,sl} = \max\{25; 15; 10\} = 25\ mm$

$c_{min,sw} = max\{10; 15; 10\} = 15\ mm$

$c_{nom,sl} = 25 + 5 = 30\ mm$

$c_{nom,sw} = 15 + 5 = 20\ mm$

Se verifica respectarea condițiilor practice

$c_{nom,sw}$=20 mm este multiplu de 5 mm OK

$c_{nom,sl} - c_{nom,sw} = \phi_{sw}$: 30-20=10 OK

Rezultatul este identic cu cel din Exemplul 3.6.2 (conform Anexei P); în concluzie, pentru un beton de performanță obișnuită (XRC5), cele două metode converg exact la același rezultat.

Varianta b) beton cu clasa XRC 1 (performanță superioară, declarată de producător)

$c_{min,dur} = 10\ mm$

$c_{min,sl} = \max\{25; 10; 10\} = 25\ mm$

$c_{min,sw} = max\{10; 10; 10\} = 10\ mm$

$c_{nom,sl} = 25 + 5 = 30\ mm$

$c_{nom,sw} = 10 + 5 = 15\ mm \quad (față\ de\ 20mm\ la\ Anexa\ P)$

Se verifica respectarea condițiilor practice

$c_{nom,sw}$=15 mm este multiplu de 5 mm OK

$c_{nom,sl} - c_{nom,sw} = \phi_{sw}$: 30-15=15> ϕ_{sw} =10mm nu e OK

se alege $c_{nom,sw} = 20$ rezultând 30-20=10= ϕ_{sw} OK

Concluzie

Pentru armătura longitudinală, rezultatul nu se schimbă în niciuna dintre variante — aderența (ϕ_{sl}=25mm) guvernează calculul, indiferent de metodă.

Pentru etrieri, un beton cu performanță documentată superioară (XRC1) permite o acoperire nominală mai mică (15 mm față de 20 mm). Însă, considerând situația practică în care etrierul este în contact cu armătura longitudinală, acoperirea etrierului trebuie ajustată la valoarea de 20 mm. În final, chiar dacă este posibilă o reducere teoretică, conformația practică conduce la aceeași acoperire ca la Anexa P.

Anexa P (echivalentă practic cu ipoteza conservatoare XRC5-7) rămâne alegerea sigură.

3.6 Exerciții rezolvate

Exemplele folosesc exclusiv relațiile și tabelele din acest capitol; rezolvările complete sunt date la final.

Exemplul 3.6.1 — Estimarea diametrelor înainte de a le cunoaște

Explicați de ce, la calculul acoperirii cu beton din acest capitol, se folosesc valori estimate ale diametrelor (de regulă ϕ_{sl} *=25 mm pentru armătura longitudinală,* ϕ_{sw} *=10 mm pentru etrieri), deși diametrele reale rezultă abia din dimensionarea la încovoiere (capitolul 4) și forță tăietoare (capitolul 5).*

Calculul acoperirii are nevoie de ϕ_{sl} și ϕ_{sw} pentru a determina $c_{nom,sl}$, $c_{nom,sw}$ și, în final, d1 — mărime folosită la calculul înălțimii utile d=h−d1, punctul de plecare al dimensionării la încovoiere din capitolul 4. Dar diametrele reale ale armăturii rezultă după dimensionare, care are nevoie de d ca date de intrare. Apare, , următoarea situație : pentru a afla d avem nevoie de ϕ_{sl}, iar pentru a alege ϕ_{sl} (rațional) avem nevoie de rezultatul calculului care folosește d.

Soluția practică, folosită curent în proiectare, este să se estimeze inițial diametrele cu valori uzuale, să se calculeze d1 și d pe baza lor, să se dimensioneze armătura , iar la final să se compare diametrul rezultat cu cel estimat:

- $\phi_{sl,est}$=25 mm — un diametru spre valoarea maximă posibilă pentru beton armat fiind o valoare acoperitoare pentru armătura principală a grinzilor obișnuite (domeniul uzual este ϕ14...ϕ28), astfel încât să nu mai trebuiască refăcut calculul de acoperire în special în calculele manuale. Bineînțeles un calcul automat poate regla valoare acoperirii în funcție de armătura efectiv aleasă după calcul de rezistență. Diametrul final rezultă din calculul la moment încovoietor (capitolul 4)
- $\phi_{sw,est}$=10 mm (uneori 8 mm) — diametru uzual pentru etrieri la grinzi curente, suficient de mare pentru ca etrierul să aibă rigiditate, dar suficient de mic pentru a nu îngroșa inutil acoperirea, diametrul final rezultă din calculul la forță tăietoare (capitolul 5).

Sensibilitatea rezultatului la această estimare este, în practică, redusă: dacă diametrul final ar fi, de exemplu, ϕ_{sl}=20 mm în loc de 25 mm estimat, d1 s-ar modifica doar cu (25−20)/2=2,5 mm — o diferență neglijabilă față de un d tipic de 400...600 mm. Din acest motiv, se reia calculul lui d1 doar dacă diametrul final diferă substanțial (cu două sau mai multe trepte comerciale) de cel estimat inițial.

Exemplul 3.6.2— Acoperirea nominală pentru o grindă la interior

O grindă din beton armat, situată la interiorul unei clădiri (clasă de expunere XC1), are clasa structurală recomandată S4 (durata de viață 50 ani) Armătura longitudinală estimată are φ_{sl}=25 mm, iar etrierii ϕ_{sw}=10 mm, agregatele au dimensiunea maximă D_{upper}=16mm< 32mm, toleranța de execuție, Δc_{dev}=5mm (posibilă pt. XC1). Determinați acoperirea cu beton.

Din Tabelul 3.4 (clasă structurală S4, XC1): $c_{min,dur}$ = 15 mm.

$$c_{min,sl} = max\{25\ ;\ 15\ ;\ 10\} = 25\ mm \quad \text{(guvernează aderența)}$$

$$c_{min,sw} = max\{10\ ;\ 15\ ;\ 10\} = 15\ mm \quad \text{(guvernează durabilitatea)}$$

Acoperirile nominale (Δc_{dev}=5 mm):

$$c_{nom,sl} = 25 + 5 = 30\ mm$$

$$c_{nom,sw} = 15 + 5 = 20\ mm$$

Verificare regulă practică:

$c_{nom,sw}$=20 mm este multiplu de 5 mm OK

$c_{nom,sl}-c_{nom,sw}$=30−20=10mm=ϕ_{sw} OK

Exemplul 3.6.3— Sensibilitatea la clasa de expunere

Pentru aceeași grindă din Exemplul 3.6.2, comparați $c_{min,dur}$ dacă elementul s-ar afla, în loc de XC1, în clasa de expunere XC4 (beton exterior expus direct ploii). Ce înseamnă practic această diferență pentru acoperirile nominale $c_{nom,sl}$ și $c_{nom,sw}$?

Din Tabelul 3.4 (clasă structurală S4, XC4):

$c_{min,dur}$ = **30 mm** mult mai mare decât 15mm pentru clasa de expunere XC1, acum durabilitatea guvernează și acoperirea armăturii longitudinale și a etrierilor

$$c_{min,sl} = max\{25\ ;\ 30\ ;\ 10\} = 30\ mm$$

$$c_{min,sw} = max\{10\ ;\ 30\ ;\ 10\} = 30\ mm$$

Acoperirile nominale: se consideră valoarea uzuală a toleranței de execuție, Δc_{dev}=**10 mm (față de 5 mm în exemplul precedent, unde s-a admis control al execuției)**:

$$c_{nom,sl} = 30 + 10 = 40\ mm$$

$$c_{nom,sw} = 30 + 10 = 40\ mm$$

Verificare regulă practică:

$c_{nom,sw}$=40 mm este multiplu de 5 mm OK

$c_{nom,sl} - c_{nom,sw}$=40−40=0mm < ϕ_{sw}=10 **nu e OK**

aleg pentru $c_{nom,sl} = c_{nom,sw} + \phi_{sw}$=40+10=50mm **OK**

Simpla trecere de la un mediu interior uscat (XC1) la unul exterior expus ploii (XC4), păstrând aceeași clasă structurală, mărește acoperirea nominală a etrierilor de la 20 la 40 mm .

Exemplul 3.6.4— Clase de expunere multiple

O grindă dintr-un parcaj subteran situat pe litoral (XS1), este expusă stropirii cu apă ce conține săruri de dezghețare (clasă de expunere XD3), având clasa structurală S4 (durata de viață 50 ani). Determinați acoperirea cu beton.

Din Tabelul 3.4:

clasă structurală S4, XS1: $c_{min,dur}$ = 35 mm

clasă structurală S4, XD3: $c_{min,dur}$ = 45 mm

se alege valoarea cea mai mare, deci $c_{min,dur}$ = 45 mm

$c_{min,sl} = max\{25\ ;\ 45\ ;\ 10\} = 45\ mm$

$c_{min,sw} = max\{10\ ;\ 45\ ;\ 10\} = 45\ mm$

Acoperirile nominale: toleranța de execuție Δc_{dev}=10 mm:

$c_{nom,sl} = 45 + 10 = 55\ mm$

$c_{nom,sw} = 45 + 10 = 55\ mm$

Verificare regulă practică:

$c_{nom,sw}$=55 mm este multiplu de 5 mm OK

$c_{nom,sl} - c_{nom,sw}$=55−55=0mm < ϕ_{sw}=10 **nu e OK**

aleg pentru $c_{nom,sl} = c_{nom,sw} + \phi_{sw}$=55+10=65mm **OK**

Exemplul 3.6.5— Reducere acoperire

Pentru grinda de la exemplul 3.6.4 prezentați o soluție de reducere a acoperirii cu beton și recalculați acoperirile cu beton

Conform Tabelului 3.3, se poate obține o reducere a clasei structurale, de la S4 la S3, dacă clasa de rezistența a betonului se alege mai mare decât cea minimă recomandată în Tabelul 3.5.

Pentru alegerea clasei structurale la S3, clasa betonului trebuia aleasă astfel:

Clasa de expunere XS1: minim C40/50 (față de C30/37pentru clasa structurală S4)

Clasa de expunere XD3: minim C45/55 (față de C35/45 pentru clasa structurală S4)

Concluzie: pentru a satisface ambele clase de expunere se alege minim C45/55 și astfel acoperirile cu beton rezultă:

clasă structurală **S3**, XS1: $c_{min,dur}$ = 30 mm

clasă structurală **S3**, XD3: $c_{min,dur}$ = 40 mm

se alege valoarea cea mai mare, deci $c_{min,dur}$ = 40 mm

$$c_{min,sl} = max\{25\ ;\ 40\ ;\ 10\} = 40\ mm$$

$$c_{min,sw} = max\{10\ ;\ 40\ ;\ 10\} = 40\ mm$$

Acoperirile nominale: toleranța de execuție Δc_{dev}=10 mm:

$$c_{nom,sl} = 40 + 10 = 50\ mm$$

$$c_{nom,sw} = 40 + 10 = 50\ mm$$

Verificare regulă practică:

$c_{nom,sw}$=50 mm este multiplu de 5 mm OK

$c_{nom,sl} - c_{nom,sw}$=50−50=0mm < ϕ_{sw}=10 **nu e OK**

aleg pentru $c_{nom,sl} = c_{nom,sw} + \phi_{sw}$=50+10=60mm **OK**

Dacă se dorește o reducere suplimentară, se poate aplica un sistem de asigurare a calității superior, care reduce clasa structurală de la S3 la S2 și, de asemenea, toleranța de execuție de la 10 mm la 5 mm. Din Tabelul 3.4:

clasă structurală **S2**, XS1: $c_{min,dur}$ = 25 mm

clasă structurală **S2**, XD3: $c_{min,dur}$ = 35 mm

se alege valoarea cea mai mare, deci $c_{min,dur}$ = 35 mm

$$c_{min,sl} = max\{25\ ;\ 35\ ;\ 10\} = 35\ mm$$

$$c_{min,sw} = max\{10\ ;\ 35\ ;\ 10\} = 35\ mm$$

Acoperirile nominale: toleranța de execuție Δc_{dev}=5 mm:

$$c_{nom,sl} = 35 + 5 = 40\ mm$$

$$c_{nom,sw} = 35 + 5 = 40\ mm$$

Verificare regulă practică:

$c_{nom,sw}$=40 mm este multiplu de 5 mm OK

$c_{nom,sl} - c_{nom,sw}$=40−40=0mm < ϕ_{sw}=10 **nu e OK**

aleg pentru $c_{nom,sl} = c_{nom,sw} + \phi_{sw}$=40+10=50mm **OK**

În final rezultă $c_{nom,sl}$= 50 mm, iar acoperirea nominală a etrierilor rămâne 40 mm.

CAPITOLUL 4

CALCULUL LA ÎNCOVOIERE AL GRINZILOR DIN BETON ARMAT LA SLU

4.1 Introducere

Sub acțiunea unui moment încovoietor pozitiv, o grindă din beton armat se comportă asimetric: fibra superioară se scurtează (compresiune), iar fibra inferioară se alungește (întindere). Betonul are o rezistență bună la compresiune, dar foarte mică la întindere: fisurează în zona întinsă la eforturi unitare foarte mici, de ordinul a câțiva MPa. Din acest motiv, în zona întinsă se prevede armătură din oțel, capabilă să preia întreaga forță de întindere după fisurarea betonului. Zona comprimată rămâne, în continuare, în sarcina betonului. Acest mecanism — beton la compresiune, oțel la întindere — este baza betonului armat, calculele necesare aferente acestei situații fiind prezentate în acest capitol. Procedeul de armare în acest caz este armarea simplă (armătură longitudinală de rezistență doar în zona întinsă).

Observație. Chiar dacă betonul, în majoritatea cazurilor, preia integral eforturile de compresiune care se dezvoltă într-o grindă, există situații când este nevoie de suplimentarea rezistenței în zona comprimată a grinzii. În acest caz se adaugă bare longitudinale de rezistență în zona comprimată, iar procedeul de calcul devine armarea dublă (armare în zona întinsă și în zona comprimată).

Câteva dintre elementele necesare calculului unei grinzi simplu armate sunt redate în desenele din Figura 4.3, urmând ca pe parcursul capitolului să fie dezvoltate. Astfel, se definesc următoarele caracteristici:

Armături longitudinale de rezistență întinse = armăturile care preiau eforturile de întindere din grindă, provenite din solicitarea de moment încovoietor (acest capitol)

Armături longitudinale constructive = armăturile necesare din punct de vedere constructiv (pentru montajul etrierilor)
Etrieri = armături verticale necesare pentru preluarea eforturilor provenite din forța tăietoare (capitolul următor)
x = înălțimea axei neutre, distanța de la fibra cea mai comprimată până la linia unde eforturile unitare sunt zero
d1 = distanța de la fibra cea mai întinsă de beton până la centrul de greutate al armăturilor: $d_1 = c_{nom,sl} + \frac{\Phi_{sl}}{2}$
d = înălțimea utilă, distanța de la centrul de greutate al armăturilor întinse până la fibra cea mai comprimată de beton:

$$\mathrm{d} = h - d_1$$

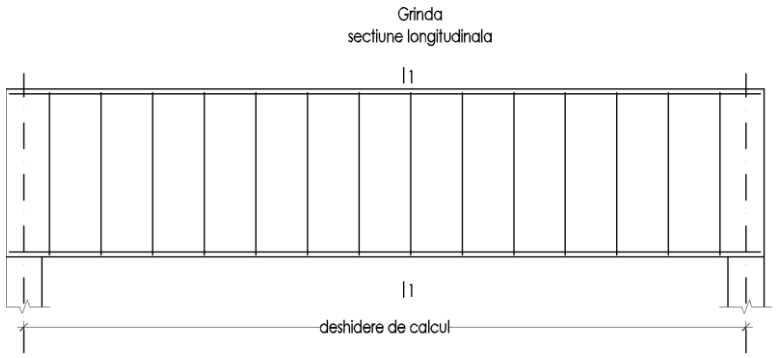


Figura 4.1 — Grindă simplu rezemată: secțiune longitudinală și deschiderea de calcul

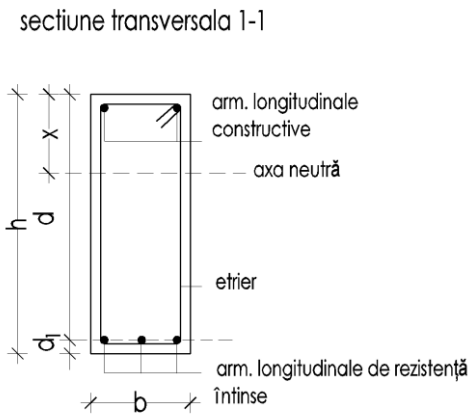


Figura 4.2 — Secțiune transversală: notațiile geometrice și tipurile de armătură

Pentru o grindă cu armătura longitudinală de rezistență (întinsă) dispusă pe mai multe rânduri, d și d1 devin:

- armăturile longitudinale întinse pe 2 rânduri:

$$d_1 = c_{nom,sl} + \Phi_{sl} + \frac{c_s}{2}$$

$$\mathrm{d} = h - d_1$$

- armăturile longitudinale întinse pe 3 rânduri:

$$d_1 = c_{nom,sl} + \Phi_{sl} + c_s + \frac{\Phi_{sl}}{2}$$

$$\mathrm{d} = h - d_1$$

c_s = distanța între rândurile de bare longitudinale

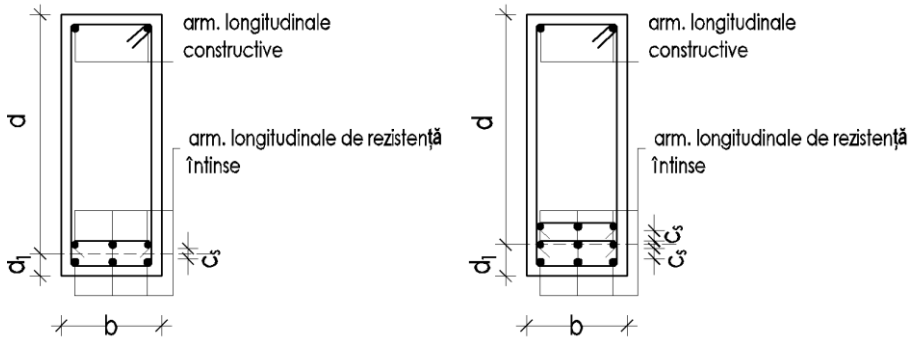


Figura 4.3 — Distanțele d1 și d pentru o grindă cu armătura longitudinală întinsă la partea inferioară, pentru situațiile: armături pe 2 rânduri și pe 3 rânduri

Moduri teoretice de cedare a unei grinzi încovoiate

Comportarea unei secțiuni la încovoiere depinde decisiv de cantitatea de armătură întinsă prevăzută, raportată la secțiunea de beton.

Teoretic, se disting trei situații, în funcție de care material atinge primul starea limită:

- **Cedarea ductilă (dorită) — secțiune slab și mediu armată** — armătura atinge deformația specifică de curgere ε_{yd} înainte ca betonul să atingă deformația ultimă ε_{cu}. După curgerea oțelului, secțiunea continuă să se deformeze semnificativ (bara „curge", fisurile se deschid vizibil) înainte de cedarea finală prin zdrobirea betonului. Cedarea este ductilă — precedată de avertismente clare (deschiderea fisurilor, săgeți vizibile) și este comportamentul dorit.
- **Cedarea casantă (de evitat) se poate produce în următoarele situații:** *secțiune puternic armată* — betonul atinge ε_{cu} înainte ca armătura să curgă. Cedarea are loc prin zdrobirea bruscă a betonului comprimat, fără avertisment vizibil prealabil — cedare casantă (fragilă), de evitat.

  secțiune subarmată — în momentul apariției primei fisuri, la o arie de armătură prea mică (sub $A_{s,min}$), transferul brusc al eforturilor de întindere poate conduce la ruperea barelor de armătură, rezultând o cedare bruscă, fără avertisment.
- **Cedarea ideală — cazul limită teoretic**, în care oțelul atinge εyd exact în momentul în care betonul atinge ε_{cu}. Folosită în calcule teoretice.

Fizic, procesul se desfășoară astfel, pe măsură ce încărcarea crește: pe măsură ce armătura se apropie de curgere și apoi curge, ea se alungește tot mai mult, iar axa neutră se deplasează treptat în sus, spre fibra comprimată — zona de beton comprimată devine tot mai mică. Dacă armătura este în cantitate optimă, acest proces continuă, cu deformații mari și vizibile, până când zona comprimată — deja micșorată — atinge deformația specifică ultimă ε_{cu} și betonul cedează prin zdrobire, DUPĂ ce armătura a curs deja. Limita x_{lim} marchează exact granița

acestui comportament: adâncimea axei neutre sub care armătura apucă să curgă înainte ca betonul să se zdrobească.

Un beton armat proiectat corect trebuie să cedeze în primul mod ductil. De aceea, standardul impune o limită superioară pentru cantitatea de armătură (respectiv, echivalent, pentru adâncimea axei neutre x), dincolo de care armarea simplă (doar cu armătură întinsă) nu mai este permisă. Această limită, deja introdusă în capitolul 2 sub numele μ_{lim}, este dedusă în secțiunea 4.2 și folosită la etapa 4 a metodologiei de calcul din secțiunea 4.4.

Acest capitol tratează exclusiv secțiuni dreptunghiulare cu armare simplă (armătură doar în zona întinsă) aplicate pentru moment pozitiv, la grinzi simplu rezemate. Aceleași relații se aplică însă, prin simetrie, și momentului negativ (armătură la partea superioară) de la console sau de la reazemele intermediare. Secțiunile T și armarea dublă (cu armătură și în zona comprimată, necesară atunci când $\mu>\mu_{lim}$ și secțiunea nu poate fi mărită) nu fac obiectul acestei lucrări.

4.2 Reguli de armare longitudinală

Armătura minimă $A_{s,min}$

O secțiune foarte slab armată ridică o problemă specifică, distinctă de ductilitate: dacă aria de armătură este prea mică, momentul capabil al secțiunii fisurate poate fi mai mic decât momentul care produce chiar fisurarea betonului nefisurat. Într-un asemenea caz, în chiar momentul apariției primei fisuri, armătura ar fi solicitată brusc peste capacitatea ei și s-ar rupe, rezultând o cedare bruscă, fără avertisment.

SR EN 1992-1-1:2024 permite determinarea armăturii minime la încovoiere prin trei metode distincte, cu domenii de aplicare diferite. Această secțiune le prezintă pe toate trei, apoi le compară pe două exemple numerice.

Varianta 1 — utilizarea momentului de fisurare M_{cr}

Cerința de bază, general valabilă pentru orice element încovoiat (structuri static determinate sau nedeterminate, indiferent de nivelul de încărcare), este ca armătura minimă să echilibreze momentul de fisurare al secțiunii, considerând armătura la limita de curgere caracteristică f_{yk}. Scopul acestei cerințe este dublu: asigurarea unei fisurări distribuite (fisuri multiple, cu deschideri mici, nu una singură cu deschidere mare) și menținerea unei capacități de deformare.

$$M_{R,min} \geq M_{cr} \quad \textit{(forța axială se consideră 0)}$$

M_{cr} se poate calcula presupunând o distribuție liniară de eforturi pe secțiunea de beton simplu (fără armătură), cu efortul maxim la întindere egal cu f_{ctm} (formula lui Navier):

σ=M/W, dar rescrisă invers și considerând σ=f_{ctm}

$$M_{cr} = f_{ctm} \cdot W$$

$$W = I_c/(h/2) = b \cdot h^2/6 \quad \textit{(secțiune dreptunghiulară)}$$

$$M_{cr} = f_{ctm} \cdot b \cdot h^2 / 6$$

$M_{R,min}$ este momentul capabil al secțiunii cu calculat $A_{s,min}$, cu armătura lucrând la f_{yk}. Pentru o arie de armătură foarte mică, axa neutră x este foarte apropiată de zero. Deci, brațul de pârghie z se apropie de d (z$\sim d$) și uzual se poate aproxima d≈0,9h. Cu această aproximare:

$$M_{R,min} \approx A_{s,min} \cdot f_{yk} \cdot z$$

Egalând cele două momente rezultă:

$$M_{R,min} = M_{cr}$$

$$A_{s,min} \cdot f_{yk} \cdot z = \frac{fctm \cdot b \cdot h^2}{6}$$

$$\boldsymbol{A_{s,min} = \frac{f_{ctm} \cdot b \cdot h^2}{6 \cdot f_{yk} \cdot z}}$$

În relația de mai sus z este necunoscut. Simplificat însă, se poate considera ca pentru o arie de armătură foarte mică, axa neutră x rezultă foarte apropiată de zero. Deci, brațul de pârghie z se apropie de d (z$\sim d$) și uzual se poate aproxima d≈0,9h. Cu această aproximare:

$$M_{R,min} = M_{cr}$$

$$M_{R,min} \approx A_{s,min} \cdot f_{yk} \cdot d = A_{s,min} \cdot f_{yk} \cdot d$$

$$A_{s,min} \cdot f_{yk} \cdot d = \frac{fctm \cdot b \cdot h^2}{6}$$

$$A_{s,min} = \frac{f_{ctm} \cdot b \cdot h^2}{6 \cdot f_{yk} \cdot d} = \frac{f_{ctm} \cdot b \cdot h^2}{6 \cdot f_{yk} \cdot 0.9 \cdot h} = 0.185 \cdot \frac{f_{ctm} \cdot A_c}{f_{yk}}$$, unde $A_c = b \cdot h$

$$\boldsymbol{A_{s,min} \approx 0{,}185 \cdot f_{ctm} \cdot A_c / f_{yk}}$$

Varianta 1b utilizare M_{cr}- cazul grinzilor static determinate

Atunci când sunt îndeplinite simultan trei condiții:

-verificarea se face la starea limită ultimă

-elementul este proiectat ca static determinat, fără cerința de fisurare distribuită

- momentul de calcul M_{Ed} este mai mic decât momentul de fisurare M_{cr}— cu alte cuvinte, elementul este atât de puțin solicitat încât nici nu ajunge, în mod normal, să fisureze.

Aria minimă se obține din următoarea egalitate

$$\boldsymbol{M_{Rd,min} = k_{dc} \cdot M_{Ed}}$$

k_{dc}=1,0 pentru clasa de ductilitate a armăturii C

k_{dc} =1,1 pentru clasa B

k_{dc} =1,3 pentru clasa A.

De exemplu, pentru un element din clasa B, condiția este practic, verificarea $M_{Rd}/M_{Ed} \geq 1{,}1$ — o marjă mică și de obicei îndeplinită la majoritatea grinzilor

Varianta 2 utilizare A_{smin} din condiția de fisurare de la SLS

Varianta calibrată suplimentar, introduce factorul de scară k_h , cu valori permise în intervalul 0,5...0,8, care ține cont de efectul dimensiunilor secțiunii asupra eforturilor unitare din beton. Această relație este prezentată ca prevedere suplimentară pentru controlul fisurării la starea limită de serviciu SLS. În principiu este o rafinare a variantei 1

$$\boldsymbol{A_{s,min} = 0,2\, k_h \cdot f_{ct,eff} \cdot \frac{A_c}{f_{yk}}}$$

$f_{ct,eff}$ este rezistența medie la întindere a betonului la momentul apariției primelor fisuri (se poate lua $f_{ct,eff}=f_{ctm}$)

$Ac = b \cdot h$ este aria totală a secțiunii de beton

k_h este un coeficient care ține cont de faptul că eforturile de întindere autoechilibrate din secțiune nu sunt uniforme:]

$k_h = 0{,}8 - 0{,}6 \cdot \{min(b; h) - 0{,}3\}) \quad (0{,}5 \leq k_h \leq 0{,}8)$ cu b și h în [m]

Considerând limita maximă $k_h = 0.8$ relația devine

$$\boldsymbol{A_{s,min} = 0.16 \cdot f_{ctm} \cdot \frac{A_c}{f_{yk}}}$$

Se observă că valoarea astfel obținută este foarte aproape de valoarea calculată simplificat utilizând M_{cr} (varianta 1): $\boldsymbol{A_{s,min} = 0.185 \cdot f_{ctm} \cdot \frac{A_c}{f_{yk}}}$

A_{smin} aferentă numărului și diametrelor minime a barelor longitudinale

SR EN 1992-1-1:2024 nu specifică un diametru minim longitudinal general pentru grinzi. Ținând însă cont de prevederile legate de seism din România, se folosesc în zona întinsă a oricărei grinzi minimum 2 bare, de diametru ϕ14mm — independent de rezultatul calculului. Astfel, rezultă o arie minimă aferentă pentru 2ϕ14 :

$$\boldsymbol{A_{s,min\ 2\phi14} = 308 mm^2}$$

Exemplu calcul $A_{s,min}$

Exemplele următoare compară cele 2 variante din EC2 și regula constructivă (2ϕ14), pentru două secțiuni de dimensiuni diferite, din beton C25/30 și oțel B500B (clasă de ductilitate B).

Exemplul 4.2.1 — Grindă 250×500mm

Se consideră simplificat d=0.9h= 0.9 500 = 450 mm. $k_h = 0{,}8 - 0{,}6 \cdot \{min(b; h) - 0{,}3)\} = 0{,}8 - 0{,}6 \cdot \{min(0.25; 0.5) - 0{,}3)\} = 0.83 > 0.8$ deci se consideră k_h=0.8

Metoda	Calcul	$A_{s,min}$
Varianta 1: $A_{s,min} = 0.185 \cdot \frac{f_{ctm} \cdot A_c}{f_{yk}}$	$0.185 \frac{2.6 \cdot 250 \cdot 500}{500}$	$120\ mm^2$
Varianta 2: $A_{s,min} = 0{,}2\ k_h \cdot \frac{f_{ctm} \cdot A_c}{f_{yk}}$	$0.2 \cdot 0.8 \frac{2.6 \cdot 250 \cdot 500}{500}$	$104\ mm^2$
Prevedere constructivă $A_{s,min\ 2\phi14}$	$308\ mm^2$	$308\ mm^2$

Observație

Regula constructivă (2⌀14=308mm²) depășește ambele valori calculate (104-120mm²)

Exemplul 4.2.2 — Grindă 450×900mm, c_{nom}=30mm, ϕ=25mm

Se consideră simplificat d=0.9·h= 0.9 ·900 = 810 mm. $k_h = 0{,}8 - 0{,}6 \cdot \{min(b; h) - 0{,}3)\} = 0{,}8 - 0{,}6 \cdot \{min(0.45; 0.9) - 0{,}3)\} = 0.71$

Metoda	Calcul	$A_{s,min}$
Varinata 1: $A_{s,min} = 0.185 \cdot \frac{f_{ctm} \cdot A_c}{f_{yk}}$	$0.185 \frac{2.6 \cdot 450 \cdot 900}{500}$	$390\ mm^2$
Varinata 2: $A_{s,min} = 0{,}2\ k_h \cdot \frac{f_{ctm} \cdot A_c}{f_{yk}}$	$0.2 \cdot 0.71 \frac{2.6 \cdot 450 \cdot 900}{500}$	$299\ mm^2$
Prevedere constructivă $A_{s,min\ 2\phi14}$	$308\ mm^2$	$308\ mm^2$

Armătura maximă $A_{s,max}$

O secțiune cu o cantitate prea mare de armătură este dificil de executat și poate conduce la o rupere casantă. Un număr mare de bare face dificilă respectarea distanțelor minime dintre bare și, mai ales, compactarea corespunzătoare a betonului în jurul armăturii. În plus, limitarea cantității de armătură la A_{smax} urmărește evitarea ruperii casante în care betonul comprimat cedează înainte ca armătura întinsă să ajungă la curgere.

Ca regulă practică de proiectare, utilizată și în ediția anterioară a standardului SR EN 1992-1-1:2004, art. 9.2.1.1(3), aria totală a armăturii longitudinale, atât întinsă cât și comprimată, nu trebuie să depășească:

$$A_{s,max} = 0{,}04\ A_c$$

Notă

În textul SR EN 1992-1-1:2024 nu există un articol care să reafirme explicit plafonul de 4% (spre deosebire de ediția 2004). Este posibil ca acest control să fie considerat acum implicit, asigurat prin respectarea distanțelor minime dintre bare și a condițiilor de ancorare/suprapunere.

Armătură laterală suplimentară la grinzi înalte (h > 600mm)

Pentru grinzile cu înălțimea mai mare de 600 mm, cu armătura longitudinală întinsă concentrată în zona fibrei celei mai întinse, se prevede o armătură

longitudinală suplimentară pe fețele laterale ale grinzii, destinată controlului fisurării. Armătura $A_{s,web}$se distribuie uniform pe cele două fețe laterale, iar distanța dintre bare nu trebuie să depășească 300 mm. Înălțimea zonei pe care se distribuie această armătură este $d - a_1 - x, unde\ a_1 = 150$mm. Aria totală a armăturii distribuite pe cele două fețe se determină cu relația:

$$A_{s,web} = 0{,}2\ \frac{f_{ct,eff}}{f_{yk}}\ b_w\ (d - x - a_1)$$

Distanța dintre bare

Se impune și o distanță liberă minimă între barele paralele pentru a permite accesul vibratorului de beton și curgerea betonului proaspăt (inclusiv a agregatelor) printre bare, astfel încât să nu rămână goluri:

$$c_s \geq max\{\ \Phi\ ;\ D_{upper} + 5\ mm\ ;\ 20\ mm\ \}$$

Formula cs se aplică atât pe orizontală, cât și pe verticală, între rânduri

Φ *=diametrul armăturii; se consideră cel mai mare* Φ *dacă 2 bare succesive au diametre diferite*

$D_{upper} = dimensiunea\ maxime\ a\ agregatului\ din\ beton$

$+5mm = toleranța\ dimensiunii\ agregatului$

$20mm = toleranța\ dimensiunii\ agregatului$

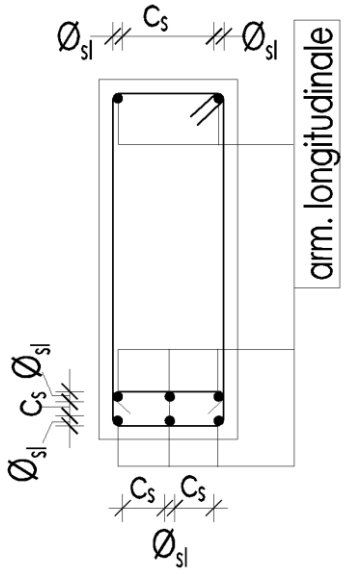


Figura 4.4 — Distanța liberă între bare: spațiu pentru accesul vibratorului și curgerea betonului printre bare

Formula de mai sus dă o valoare minimă absolută, dar în plus, distanța liberă și dispunerea barelor să fie „suficiente pentru a permite accesul vibratoarelor, dacă este necesar”. În secțiuni cu armătură aglomerată (de exemplu, zonele de reazem ale consolelor sau grinzilor continue, unde momentul negativ cere multe bare pe fibra superioară), respectarea strictă a minimului numeric nu garantează automat că vibratorul poate ajunge fizic între bare. În mod obișnuit, un vibrator are diametrul de 50mm la care trebuie adăugată o toleranța de aproximativ 20 mm. Proiectantul trebuie să judece situația de la caz la caz, uneori optând pentru o dispunere pe două rânduri chiar dacă barele ar încăpea, matematic, pe un singur rând .

Exemple rezolvate

Exemplul 4.2.3 — Verificarea completă a regulilor constructive la o secțiune de grindă

Se consideră o grindă din beton armat cu secțiunea b×h=400×800mm, executată din beton C25/30 și armătură B500. Armătura de la moment încovoietor este 3⌀25, dispusă pe un singur rând, cu înălțimea axei neutre x=200mm. Se cere verificarea tuturor regulilor constructive aplicabile armării la moment a acestei grinzi.

b=400mm; h=800mm; A_c=400 x 800= 320 000;

C25/30: fck=25MPa, fctm=2,6MPa

B500: fyk=500MPa, f_{yd}=434,78MPa

$A_{s,eff}$=3⌀25=1472,6mm²

$c_{nom,sw}$=35mm, ϕ_{sw}=8mm:

d1=35+8+25/2=55,5mm

d=800−55,5=744,5mm.

1. **Armătura minimă și maximă ($A_{s,min}$, $A_{s,max}$)**

   Pentru determinarea ariei minime se pot aplica mai multe relații așa cum s-a prezentat în acest capitol. În acest exemplu se aplica varianta 2 (condiția de evitare fisurare) și condiția de bare minime :

Condiția	Calcul	Verificare
$A_{s,min} = 0{,}2\ k_h \cdot \frac{f_{ctm} \cdot A_c}{f_{yk}}$	k_h=0,74 (b−0,3=0,1; h−0,3=0,5 → min=0,1) $A_{s,min} = 0.2 \cdot 0.74\ \frac{2.6 \cdot 320000}{500}$	As,min=246,3mm² ≤ 1472,6mm² ✓

Nr. și diametrul minim de bare 2 ⌀ 14 $A_{s,min2\,\varnothing\,14}$	$A_{s,min2\,\varnothing\,14} = 308mm2$	$308mm2 \leq 1472{,}6\text{mm}^2$ ✓
$A_{s,max} = 0{,}04 \cdot A_c$	$0{,}04 \times 320000$	$A_{s,max} = 12800\text{mm}^2 \geq 1472{,}6\text{mm}^2$ ✓

2. Distanța dintre bare (cs)

Distanța liberă disponibilă, pentru 3 bare pe un singur rând:

$$c_s = [b - 2 \cdot c_{nom,sw} - 2 \cdot \phi_{sw} - n \cdot \phi_{sl}] / (nr.bare - 1) = [400 - 70 - 16 - 75] / (3-1) = 119{,}5\ mm$$

Minimul cerut (teoretic):

$c_{s,min}$=max{ϕ; D_{upper}+5; 20mm}=max{25; 16+5=21; 20}=25mm (D_{upper}=16mm, ca în exemplele anterioare).

119,5 mm ≥ 25 mm ✓

3. Armătură laterală pe fețele inimii ($A_{s,web}$) — h=800mm > 600mm

Grinda depășește pragul de 600mm de la care se cere armătură laterală suplimentară pentru controlul fisurării (a se vedea secțiunea 4.2). Se calculează:

$$A_{s,web} = 0{,}2 \cdot (f_{ctm}/f_{yk}) \cdot b_w \cdot (d - x - a1) = 0{,}2 \cdot (2{,}6/500) \cdot 400 \cdot (744{,}5 - 200 - 150)$$

$A_{s,web}$ = 164,1 mm² care se distribuie pe cele două fețe ale inimii, pe înălțimea de *d − x − a1= 744,5 − 200 − 150= 394.5mm astfel încât distanța între bare să nu depășească 300mm. Astfel, se poate dispune un rând de armătură aproximativ la jumătatea intervalului 394/2*≈200mm, cu doar 2 bare ϕ12 (arie 226,2mm² ≥ 164,1mm² necesar)

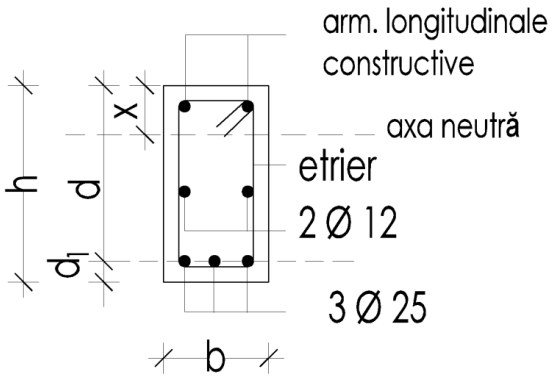


Figura 4.5 — Dispunerea armăturii intermediare pe inima grinzii, Exemplul 4.2.3

Exemplul 4.2.4 — Verificarea distanței între bare

O grindă cu lățimea b=300 mm este armată cu 3 bare ϕ20 mm pe un singur rând, cu acoperirea nominală $c_{nom,sl}$=35 mm (determinată în Exemplul 3.6.2) și D_{upper}=16 mm. Verificați dacă distanța liberă efectivă dintre bare respectă condiția minimă din SR EN 1992-1-1:2024.

Lățimea disponibilă pentru distribuirea celor 3 bare (măsurată între fețele exterioare ale armăturii longitudinale):

$$b_{util} = b - 2c_{nom,sl} = 300 - 2 \cdot 35 = 230\,mm$$

Distanța liberă efectivă între cele 3 bare (2 goluri):

$$c_{s,eff} = \frac{b_{util} - 3 \cdot 20}{2} = \frac{230 - 60}{2} = 85\,mm$$

Condiția minimă (D_{upper}=16mm):

$$c_s \geq max\{20\,;\,21\,;\,20\} = 21\,mm$$

Cum 85 mm > 21 mm, condiția este satisfăcută — cele 3 bare încap pe un singur rând.

Exemplul 4.2.5 — Armătură aglomerată la o consolă.

La fața reazemului unei console, sunt necesare 6 bare ϕ22 mm pe fibra superioară (moment negativ), într-o secțiune cu b=300 mm. Acoperirea nominală calculată este $c_{nom,sl}$=40 mm, iar D_{upper}=20 mm. Verificați dacă cele 6 bare încap pe un singur rând, respectând distanța minimă. Dacă nu încap, propuneți o soluție.

Lățimea disponibilă și distanța minimă necesară (D_{upper}=20mm):

$$b_{util} = 300 - 2 \cdot 40 = 220\,mm \quad c_{s,min} = max\{22\,;\ 20 + 5 = 25\,;\ 20\} = 25\,mm$$

Lățimea necesară pentru 6 bare ϕ22 pe un singur rând (5 goluri de $c_{s,min}$):

$$6 \cdot 22 + 5 \cdot 25 = 132 + 125 = 257\,mm > 220\,mm \rightarrow NU\ încap$$

Cele 6 bare nu încap pe un singur rând — soluția uzuală este trecerea pe două rânduri, de exemplu 3+3 bare. Lățimea necesară pentru 3 bare pe un rând:

$$3 \cdot 22 + 2 \cdot 25 = 66 + 50 = 116\,mm \leq 220\,mm \rightarrow încap$$

Soluția pe două rânduri nu doar rezolvă problema numerică, ci lasă și un spațiu pentru accesul vibratorului. Pentru distanța pe verticală între cele două rânduri se aplică aceeași condiție minimă ($c_s \geq 25$mm) sau se poate se alege o valoare mai rotunjită (de exemplu 30 mm),

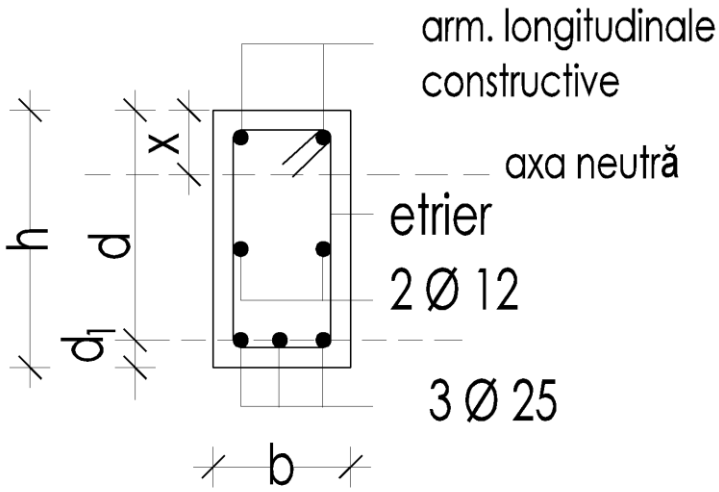


Figura 4.6 — Secțiune transversală cu armătura de rezistență dispusă pe un singur rând

Exemplul 4.2.6 — Armare pe două rânduri. O grindă este armată cu 10 bare ϕ25 mm, lățimea grinzii fiind b=350 mm. Acoperirea nominală a etrierului este $c_{nom,sw}$=30 mm, iar ϕ_{sw}=8 mm; D_{upper}=20 mm. Pe câte rânduri rezultă armătura și ce distanță liberă rezultă între barele de pe același rând?

Acoperirea nominală a armăturii longitudinale și distanța minimă necesară (D_{upper}=20mm):

$$c_{nom,sl} = 30 + 8 = 38\,mm \quad c_{s,min} = max\{25\,;20+5=25\,;\,20\} = 25\,mm$$

Lățimea disponibilă:

$$b_{util} = 350 - 2 \cdot 38 = 274\,mm$$

Se verifica câte bare încap pe un rând, la distanța minimă:

pentru 6 bare ar fi necesari 6·25+5·25=275 mm > 274 mm (nu încap, la limită)

pentru 5 bare: 5·25+4·25=225 mm ≤ 274 mm ✓.

Distribuind cele 5 bare uniform pe toată lățimea disponibilă (nu la distanța minimă), distanța liberă reală rezultă:

$$c_{s,eff} = \frac{b_{util} - 5 \cdot 25}{4} = \frac{274 - 125}{4} = 37{,}25\ mm$$

Pentru distanța pe verticală între cele două rânduri se aplică distanța minimă ($c_s \geq 25mm$)

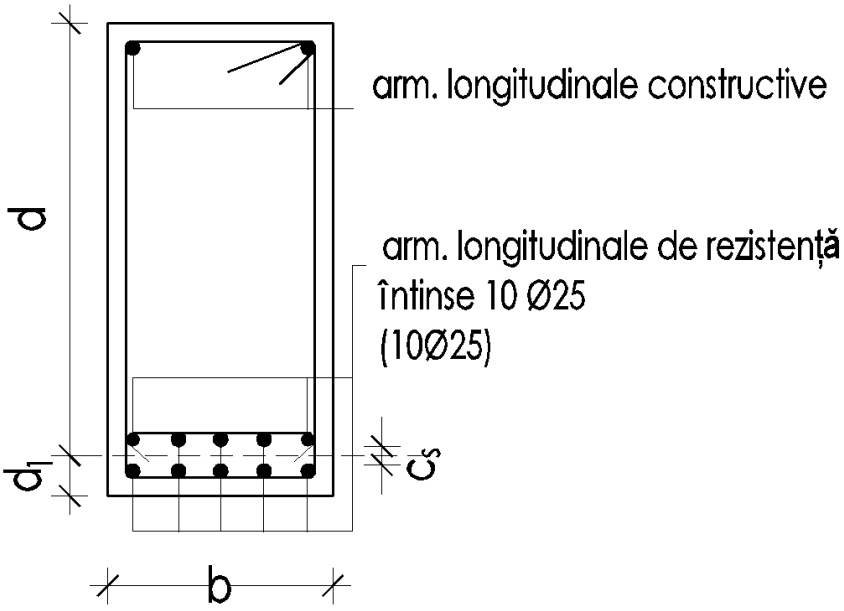


Figura 4.7 — Verificarea distanței libere între bare, cu armătura dispusă pe un singur rând

4.3 Deducerea relațiilor de calcul

Capitolul 2 a prezentat relația generală (neliniară) efort unitar–deformație specifică a betonului, folosită pentru analiza structurală. Pentru dimensionarea secțiunilor la SLU, SR EN 1992-1-1:2024 (art. 8.1.2) permite o simplificare: distribuția reală a eforturilor unitare pe zona comprimată este înlocuită cu un bloc rectangular echivalent, cu efort unitar constant f_{cd}, pe o adâncime egală cu 0,8x (unde x este înălțimea reală a axei neutre) valabilă pentru $f_{ck} \leq 50$ MPa. Figura 4.8 arată această schematizare.

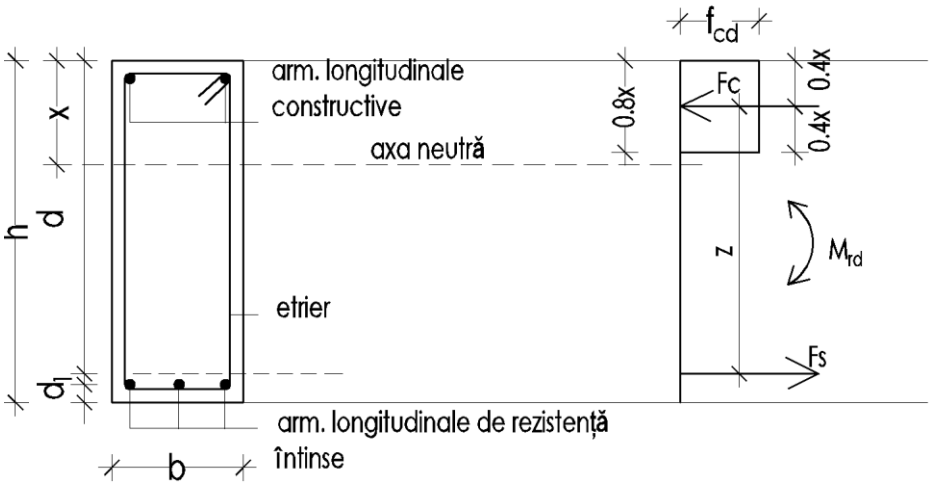


Figura 4.8 — Ipoteza de calcul: bloc rectangular de eforturi unitare dreptunghiular

Ipotezele de calcul SR EN 1992-1-1:2024 sunt:

-secțiunile plane rămân plane

-rezistența la întindere a betonului se neglijează

- eforturile din beton rezultă din distribuția simplificată (vezi figurile următoare)

- eforturile din armătură rezultă din diagrama de calcul prezentată în capitolul 2

Din echilibrul de forțe pe secțiune (Fc=Fs) rezultă:

$$0{,}8x \cdot f_{cd} \cdot b = A_s \cdot f_{yd}$$

iar din echilibrul de momente (calculat, de exemplu, în raport cu punctul de aplicație al forței din armătură), cu brațul de pârghie z=d−0,4x (distanța dintre rezultantele Fc și Fs, Fc acționând la jumătatea blocului rectangular, adică la 0,4x sub fibra comprimată extremă):

$$M_{Rd} = F_c \cdot z = 0{,}8x f_{cd} b(d - 0{,}4x)$$

Pentru a lucra cu mărimi adimensionale, independente de dimensiunile efective ale secțiunii, se definesc momentul redus μ și adâncimea relativă a axei neutre ξ:

$$\mu = \frac{M_{Ed}}{bd^2 f_{cd}} \quad ; \quad \xi = x/d$$

Înlocuind în relația de echilibru de momente, rezultă relația fundamentală μ–ξ, care nu mai depinde de dimensiunile secțiunii:

$$\mu = 0{,}8\xi(1 - 0{,}4\xi)$$

Rezolvând această ecuație de gradul 2 în raport cu ξ (rădăcina cu semnificație fizică, ξ≤1) și înlocuind în relația de echilibru de forțe, se obține coeficientul mecanic de armare ω (proporțional cu aria de armătură necesară):

$$\xi = 1{,}25\left(1 - \sqrt{1 - 2\mu}\right)$$

$$\omega = 0{,}8\xi = 1 - \sqrt{1 - 2\mu}$$

Relația $\omega = A_s \cdot f_{yd}/(b \cdot d \cdot f_{cd})$ rezultă direct din echilibrul de forțe ($0{,}8x \cdot f_{cd} \cdot b = A_s \cdot f_{yd} \Leftrightarrow 0{,}8\xi = \omega$). Aria de armătură necesară se obține apoi din $A_{s,nec} = \omega \cdot b \cdot d \cdot f_{cd}/f_{yd}$ — formula folosită la etapa 6 din secțiunea 4.4.

De ce se alege rădăcina cu semnul „–”

Ecuația μ=0,8ξ(1−0,4ξ), rescrisă direct în funcție de ω (folosind ω=0,8ξ), devine μ=ω(1−ω/2), adică o ecuație de gradul 2 în ω: ω²−2ω+2μ=0, cu rădăcinile ω=1±√(1−2μ). Dinre cele două rădăcini doar una are sens fizic: pentru M_{Ed}=0 (secțiune nesolicitată), avem μ=0, deci ar trebui ca și ω

(armătura necesară) să fie 0. Rădăcina „+” dă însă ω=1+√1=2 — o valoare absurdă pentru o secțiune nesolicitată. Rădăcina „−” dă corect ω=1−√1=0. Prin urmare, rădăcina cu semnificație fizică este întotdeauna cea cu semnul „−”, folosită în relația de mai sus.

Limita de ductilitate μ_{lim}

Așa cum s-a arătat în 4.1, armarea simplă este permisă doar dacă secțiunea cedează ductil — adică doar dacă armătura atinge deformația specifică de calcul εyd cel târziu în momentul în care betonul atinge εcu. Limita ξ_{lim} corespunzătoare acestei condiții a fost deja folosită în capitolul 2:

$$\xi_{lim} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}}$$

iar valoarea limită corespunzătoare a momentului redus rezultă direct din relația μ–ξ:

$$\mu_{lim} = 0{,}8\xi_{lim}(1 - 0{,}4\xi_{lim})$$

Condiția de armare simplă, folosită la etapa 4 din metodologia de calcul, este $\mu \leq \mu_{lim}$; valorile numerice ale lui μ_{lim}, pentru principalele clase de oțel, au fost prezentate în tabelul din capitolul 2 (μ_{lim}=0,372 pentru B500, de exemplu — valoare folosită direct în exemplele din secțiunea 4.5).

4.4 Etapele de calcul

Dimensionarea armăturii longitudinale a unei grinzi simplu armate, solicitate la moment încovoietor, urmează un algoritm de 10 etape, care însumează capitolele anterioare. În Figura 4.9 este redată o schemă logică de dimensionare la moment încovoietor.

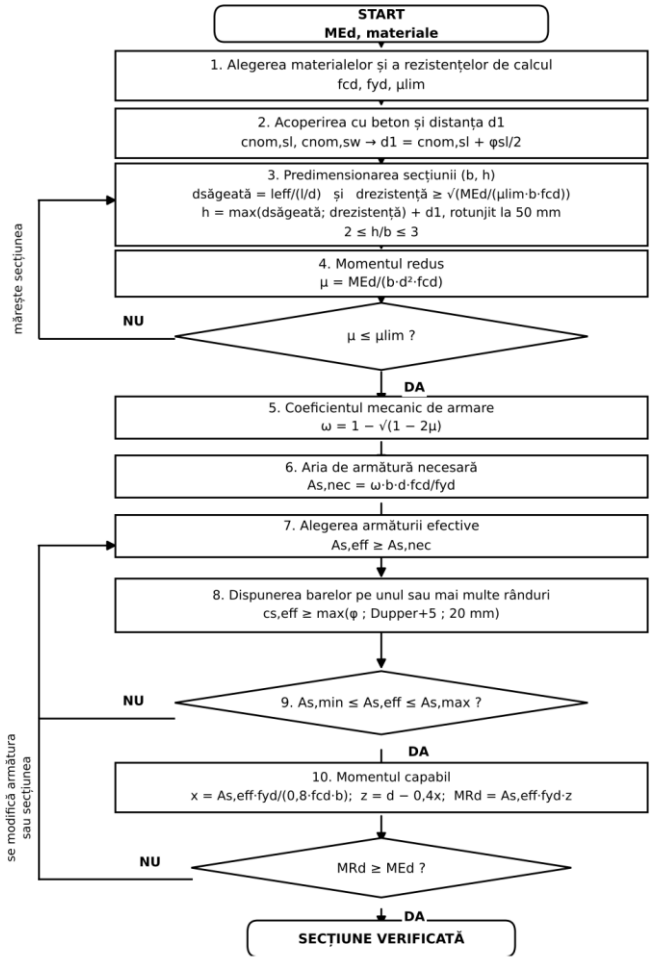


Figura 4.9 — Schema logică a algoritmului de dimensionare la încovoiere

Etapele 1 și 2 reiau, rezumat, conținutul capitolelor 2 și 3 iar etapele 3–10 sunt specifice calculului la încovoiere.

1. Alegerea materialelor și a rezistențelor de calcul

Se aleg clasa de beton și clasa de oțel (eventual orientate de clasa de expunere — Tabelul 3.5) și se calculează f_{cd}, f_{yd} și μ_{lim} conform cu prevederile din capitolul 2.

2. Acoperirea cu beton și distanța d1

Se calculează $c_{nom,sl}$, $c_{nom,sw}$ și d1 conform cu prevederile din capitolul 3 (estimând, dacă diametrele nu sunt încă alese din alte condiții, ϕ_{sl}=25 mm și ϕ_{sw}=10 mm — a se vedea Exemplul 3.6.1).

3. Predimensionarea secțiunii (b, h)

Se determină înălțimea utilă d din două condiții independente, adoptându-se valoarea mai mare: condiția de săgeată (Tabelul 4.1) și condiția de rezistență la moment încovoietor. Înălțimea totală rezultă:

h=d+d1, rotunjită în plus la un multiplu de 50 mm

d se recalculează apoi cu h-ul adoptat

Lățimea b se alege astfel încât 2≤h/b≤3, rotunjită tot la un multiplu de 50 mm, cu valoarea minimă 250 mm.

4. Momentul redus μ

$$\mu = \frac{M_{Ed}}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}}$$

Se calculează cu secțiunea (b, d) adoptată la etapa 3 și se compară cu μ_{lim} (etapa 1):

- dacă $\mu \leq \mu_{lim}$, **armarea simplă** este posibilă și se continuă cu etapa 5
- dacă $\mu > \mu_{lim}$, secțiunea trebuie mărită (revenire la etapa 3) sau este necesară armare dublă (nu face obiectul acestei lucrări).

5. Coeficientul mecanic de armare ω

$$\omega = 1 - \sqrt{1 - 2\mu}$$

conform relației deduse în secțiunea 4.3.

6. Aria de armătură necesară $A_{s,nec}$

$$A_{s,nec} = \omega \cdot b \cdot d \cdot \frac{f_{cd}}{f_{yd}}$$

7. Alegerea armăturii efective

Din tabelul cu arii de armătură (capitolul 2) se alege un număr de bare și un diametru, astfel încât $A_{s,eff} \geq A_{s,nec}$.

8. Verificarea distanței între bare

$$c_s \geq max\{\varphi\ ;\ D_{upper} + 5\,mm\ ;\ 20\,mm\}$$

Dacă armătura nu încape pe un rând, se dispune pe două rânduri sau trei rânduri (mai puțin uzual), recalculând d1 și d (capitolul 3).

9. Verificarea armării minime și maxime

$$A_{s,min} \leq A_{s,eff} \leq A_{s,max}$$

conform secțiunii 4.2.

10. Calculul momentului capabil M_{Rd} și verificarea finală

Cu $A_{s,eff}$ ales, se recalculează poziția reală a axei neutre din echilibrul de forțe:

$$0{,}8\,x\,f_{cd}\,b = A_{s,eff} f_{yd} \quad \rightarrow \quad x = \frac{A_{s,eff} f_{yd}}{0{,}8 \cdot f_{cd} \cdot b}$$

$$z = d - 0{,}4\,x$$

$$M_{Rd} = A_{s,eff} f_{yd}\, z$$

Secțiunea este corect armată dacă $M_{Rd} \geq M_{Ed}$.

Condiția de săgeată (predimensionare)

SR EN 1992-1-1:2024 (art. 9.3.3) permite omiterea verificării explicite a săgeții dacă raportul deschidere/înălțime utilă: l/d nu depășește valorile din Tabelul 4.1, care depind de sistemul structural, de procentul mecanic de armare necesar ω_r și de ponderea încărcării utile în încărcarea totală (LL/TL).

Sistem structural	ω_r=0,3 (60% / 45% / 30%)	ω_r=0,2 (60% / 45% / 30%)	ω_r=0,1 (60% / 45% / 30%)
Grindă simplu rezemată	15 / 14 / 12	17 / 15 / 13	22 / 19 / 17
Consolă	7 / 7 / 6	8 / 7 / 6	10 / 9 / 8

Tabelul 4.1 — Alegerea raportului l/d, unde $\omega_r=A_{s,req}\cdot f_{yd}/(b_w\cdot d\cdot f_{cd})$ este procentul mecanic de armare necesar. Coloanele arată valorile pentru raportul încărcare utilă/încărcare totală de 60%, 45% și, respectiv, 30%.

Deoarece ω_r nu este încă cunoscut la etapa de predimensionare (depinde de secțiunea care urmează să fie aleasă), se folosește, în practică, o valoare orientativă rezonabilă — de exemplu l/d≈15, corespunzătoare unui caz obișnuit (ω_r=0,2, încărcare utilă ≈45% din cea totală). Această valoare este folosită direct în exemplele din secțiunea 4.5.

$$d_{săgeată} = \frac{l_{eff}}{15}$$

Condiția de rezistență (predimensionare)

A doua condiție de predimensionare pornește de la relația $\mu=M_{Ed}/(b\cdot d^2\cdot f_{cd})$, impunând ca secțiunea să rămână, chiar din faza de predimensionare, în domeniul armării simple ($\mu\le\mu_{lim}$). Alegând o lățime minimă orientativă (de exemplu b=250 mm pentru secțiuni dreptunghiulare curente) și rezolvând pentru d:

$$d_{rezistență} \geq \sqrt{\frac{M_{Ed}}{\mu_{lim} \cdot b \cdot f_{cd}}}$$

Înălțimea utilă adoptată este valoarea mai mare dintre cele două condiții:

$$d = \max(d_{săgeată}, d_{rezistență}).$$

4.5 Exemple de calcul

Cele două exemple care urmează tratează aceeași grindă, solicitată de același moment de proiectare, dar cu secțiuni predimensionate diferit — o alegere „generoasă” (Exemplul 4.5.1) și o alegere mai economică (Exemplul 4.5.2). Comparația arată direct consecințele alegerii secțiunii asupra restului calculului, inclusiv un caz în care prima încercare de armare nu verifică și trebuie corectată.

Exemplul 4.5.1 — Secțiune mare

Se consideră o grindă din beton armat, simplu rezemată, cu deschiderea efectivă l_{eff}=7,00 m, solicitată la încovoiere de o încărcare uniform distribuită de calcul qd=80,0 kN/m. Grinda este realizată din beton de clasă C25/30 și este armată cu oțel de tip B500. Dimensiunea maximă a agregatului este de 16 mm. Elementul se află într-un mediu corespunzător clasei de expunere XC1, iar clasa structurală este S4. Se cere dimensionarea armăturii longitudinale inferioare la încovoiere, în ipoteza de armare simplă, respectând etapele din secțiunea 4.4.

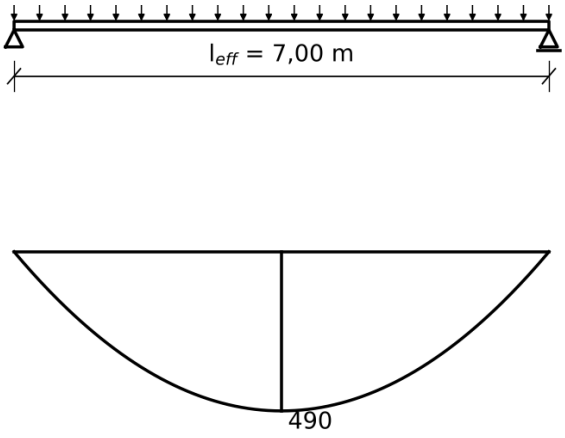


Figura 4.10 — Schema statică și diagrama de momente pentru Exemplele 4.5.1 și 4.5.2

Momentul de proiectare la mijlocul deschiderii (încărcare uniform distribuită, grindă simplu rezemată):

$$M_{Ed} = \frac{q_d l^2}{8} = \frac{80 \cdot 7^2}{8} = 490\ kNm$$

Etapa 1 — Materiale (capitolul 2)

γ_C=1,50; γ_S=1,15. Beton C25/30 (peste minimul orientativ C20/25 pentru XC1, Tabelul 3.5): f_{ck}=25 MPa, f_{cd}=16,667 MPa. Oțel B500: f_{yd}=434,78 MPa, μ_{lim}=0,372 (din clasa de ductilitate implicită, dacă tema de proiectare nu impune altă clasă).

Etapa 2 — Acoperirea cu beton (capitolul 3)

Cu $\phi_{sl,est}$=25 mm, $\phi_{sw,est}$=10 mm, D_{upper}=16 mm, clasă structurală S4, XC1 — exact datele Exemplului 3.6.2 — rezultă direct:

$$c_{nom,sl} = 35\,mm \qquad c_{nom,sw} = 25\,mm \qquad d_1 = 47{,}5\,mm$$

Etapa 3 — Predimensionarea secțiunii

Condiția de săgeată (l/d=15):

$$d_{săgeată} = \frac{7000}{15} = 467\,mm$$

Condiția de rezistență (lățime orientativă b=250 mm pentru acest calcul preliminar):

$$d_{rezistență} \geq \sqrt{\frac{490 \cdot 10^6}{0{,}372 \cdot 250 \cdot 16{,}667}} = 562\,mm$$

Se adoptă d = max(467; 562) = 562 mm (guvernează rezistența). Înălțimea totală:

$$h = d + d_1 = 562 + 47{,}5 = 609{,}5\,mm \rightarrow se\ adoptă\ h = 700\,mm$$

(s-a ales varianta mai generoasă, rotunjind la un multiplu de 50 mm cu o rezervă suplimentară; varianta imediat superioară minimului, h=650 mm, este explorată în Exemplul 4.5.2). Se recalculează:

$$d = 700 - 47{,}5 = 652{,}5\,mm$$

Lățimea b (2≤h/b≤3 → 233≤b≤350 mm): se adoptă b = 350 mm. Secțiunea predimensionată: b×h = 350×700 mm.

Etapele 4-6 — μ, ω, $A_{s,nec}$

$$\mu = \frac{490 \cdot 10^6}{350 \cdot 652{,}5^2 \cdot 16{,}667} = 0{,}197 \leq \mu_{lim} = 0{,}372$$
$$\rightarrow \quad armare\ simplă$$

$$\omega = 1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0{,}197} = 0{,}222$$

$$A_{s,nec} = \frac{0{,}222 \cdot 350 \cdot 652{,}5 \cdot 16{,}667}{434{,}78} = 1945\ mm^2$$

Etapa 7 — Alegerea armăturii

$$A_{s,eff} = 4\varnothing 25 = 19{,}63\ cm^2 = 1963\ mm^2 > 1945\ mm^2\ \checkmark$$

Etapa 8 — Distanța între bare (capitolul 3)

$$c_s \geq max\{25\ ;\ 21\ ;\ 20\} = 25\ mm$$

$$b_{util} = 350 - 2 \cdot 35 = 280\ mm \quad c_{s,eff} = \frac{280 - 4 \cdot 25}{3} = 60\ mm > 25\ mm\ \checkmark$$

Etapa 9 — Armare minimă și maximă

$$A_c = 350 \cdot 700 = 245\,000\ mm^2 \quad k_h = 0{,}8 - 0{,}6 \cdot min(0{,}05\ ;\ 0{,}4) = 0{,}770$$

$$A_{s,min} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}770 \cdot 2{,}6 \cdot 245\,000}{500} = 196\ mm^2$$

$$A_{s,max} = 0{,}04 \cdot 245\,000 = 9800\ mm^2$$

196 mm² ≤ 1963 mm² ≤ 9800 mm² — condiție satisfăcută.

Etapa 10 — Momentul capabil M_{Rd}

$$0{,}8x\ f_{cd}\ b = A_{s,eff} f_{yd} \quad \rightarrow \quad x = \frac{1963 \cdot 434{,}78}{0{,}8 \cdot 16{,}667 \cdot 350} = 183{,}6\ mm$$

$$z = d - 0{,}4x = 652{,}5 - 0{,}4 \cdot 183{,}6 = 579{,}1\ mm$$

$$M_{Rd} = A_{s,eff} f_{yd}\ z = 1963 \cdot 434{,}78 \cdot 579{,}1 \approx 494\ kNm$$

Verificare finală

M_{Rd}=494 kNm ≥ M_{Ed}=490 kNm → SECȚIUNE VERIFICATĂ. Armare corectă: b×h=350×700 mm, 4⌀25 ($A_{s,eff}$=19,63 cm²).

La partea superioară se dispun armături constructive (montaj) iar intermediar pe fețe laterale se dispun armături intermediare (necalculate în acest exemplu dar similare cu cele din exemplul 4.2.3)

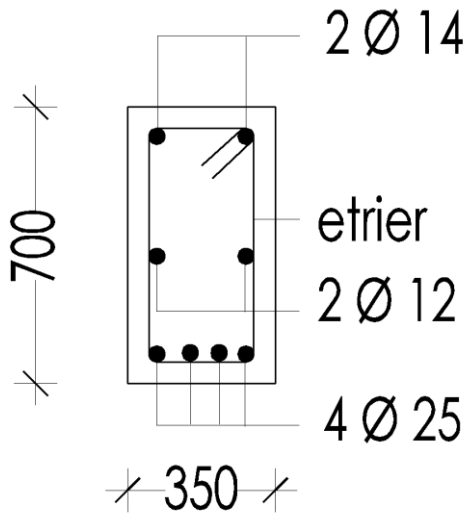


Figura 4.11 — Secțiunea armată, Exemplul 4.5.1

Exemplul 4.5.2 — Secțiune „economică”

Se consideră aceeași grindă (aceleași date de intrare, materiale și acoperire ca în Exemplul 4.5.1), dar cu o secțiune predimensionată mai economic. Se reia calculul de la etapa 3.

Etapa 3 — Predimensionarea secțiunii

Condițiile de săgeată și de rezistență sunt identice cu cele din Exemplul 4.5.1 (aceleași date de intrare): dsăgeată=467 mm, drezistență=562 mm, deci d=562

mm. De această dată se adoptă însă valoarea imediat superioară minimului necesar:

$$h = 562 + 47{,}5 = 609{,}5\,mm \quad \rightarrow \quad se\ adoptă\ h = 650\,mm$$

$$d = 650 - 47{,}5 = 602{,}5\,mm$$

Lățimea b (2≤h/b≤3 → 217≤b≤325 mm): se adoptă b = 250 mm. Secțiunea predimensionată: b×h = 250×650 mm.

Etapele 4-6 — μ, ω, $A_{s,nec}$

$$\mu = \frac{490 \cdot 10^6}{250 \cdot 602{,}5^2 \cdot 16{,}667} = 0{,}324 \leq \mu_{lim} = 0{,}372$$

$$\rightarrow \quad armare\ simplă\ (la\ limită)$$

$$\omega = 1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0{,}324} = 0{,}407$$

$$A_{s,nec} = \frac{0{,}407 \cdot 250 \cdot 602{,}5 \cdot 16{,}667}{434{,}78} = 2350\,mm^2$$

Etapa 7 — Alegerea armăturii

$$A_{s,eff} = 5\text{ø}25 = 24{,}54\,cm^2 = 2454\,mm^2 > 2350\,mm^2 \ \checkmark$$

Etapa 8 — Distanța între bare: armătura nu încape pe un rând

$$b_{util} = 250 - 2 \cdot 35 = 180\,mm$$

Verificare cu cele 5 bare pe un singur rând (4 goluri):

$$c_{s,eff} = \frac{180 - 5 \cdot 25}{4} = 13{,}7\,mm < 25\,mm$$

$$\rightarrow \quad NU\ încape;\ se\ dispune\ pe\ 2\ rânduri$$

Se aleg 3 bare pe primul rând (mai aglomerat) și 2 pe al doilea; se verifică rândul cu 3 bare (2 goluri):

$$c_{s,eff} = \frac{180 - 3 \cdot 25}{2} = 52{,}5\,mm > 25\,mm \ \checkmark$$

Distanța pe verticală între rânduri se adoptă tot 25 mm.

Etapa 9 — Armare minimă și maximă

$$A_c = 250 \cdot 650 = 162\,500\,mm^2$$

min(b−0,3; h−0,3) = min(−0,05; 0,35): expresia de sub minim rezultă negativă pentru b, deci se adoptă kh la valoarea sa maximă:

$$k_h = 0{,}8 \quad A_{s,min} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 2{,}6 \cdot 162\,500}{500} = 135\,mm^2$$

$$A_{s,max} = 0{,}04 \cdot 162\,500 = 6500\,mm^2$$

135 mm² ≤ 2454 mm² ≤ 6500 mm² — condiție satisfăcută.

Etapa 10 — Momentul capabil M_{Rd} (prima încercare, 5⌀25)

Cu armătura pe 2 rânduri (3+2), d1 se recalculează folosind poziția medie a celor două rânduri (aproximație uzuală, suficient de precisă când numărul de bare pe cele două rânduri este apropiat):

$$d_1 = 35 + 25 + 25/2 = 72{,}5\,mm \quad d = 650 - 72{,}5 = 577{,}5\,mm$$

$$x = \frac{2454 \cdot 434{,}78}{0{,}8 \cdot 16{,}667 \cdot 250} = 320{,}1\,mm \quad z = 577{,}5 - 0{,}4 \cdot 320{,}1 = 449{,}5\,mm$$

$$M_{Rd} = 2454 \cdot 434{,}78 \cdot 449{,}5 \approx 480\,kNm$$

Verificare — secțiune NEVERIFICATĂ

M_{Rd}=480 kNm < M_{Ed}=490 kNm — cele 5 bare ⌀25 nu acoperă momentul de proiectare. Reducerea brațului de pârghie cauzată de dispunerea pe 2 rânduri (d a scăzut de la 602,5 mm teoretic la 577,5 mm real) nu a fost complet compensată de aria de armătură aleasă. Soluție: se mărește aria de armătură efectivă.

Etapa 10 (reluată) — 6⌀25, 3+3 bare pe 2 rânduri

$$A_{s,eff} \;=\; 6\varnothing 25 \;=\; 29{,}45\ cm^2 \;=\; 2945\ mm^2$$

Cu 3 bare pe fiecare rând (distribuție simetrică), d1 rezultă exact din media celor două rânduri:

$$d_1 \;=\; 72{,}5\ mm \qquad d \;=\; 577{,}5\ mm$$

$$x \;=\; \frac{2945 \cdot 434{,}78}{0{,}8 \cdot 16{,}667 \cdot 250} \;=\; 384{,}1\ mm \qquad z \;=\; 577{,}5 \;-\; 0{,}4 \cdot 384{,}1 \;=\; 423{,}9\ mm$$

$$M_{Rd} \;=\; 2945 \cdot 434{,}78 \cdot 423{,}9 \;\approx\; 543\ kNm$$

Verificare finală

M_{Rd}=543 kNm ≥ M_{Ed}=490 kNm → SECȚIUNE VERIFICATĂ. Armare corectă: b×h=250×650 mm, 6⌀25 pe 2 rânduri ($A_{s,eff}$=29,45 cm²).

La partea superioară se dispun armături constructive (montaj) iar intermediar pe fețe laterale se dispun armături intermediare (necalculate în acest exemplu dar similare cu cele din exemplul 4.2.3)

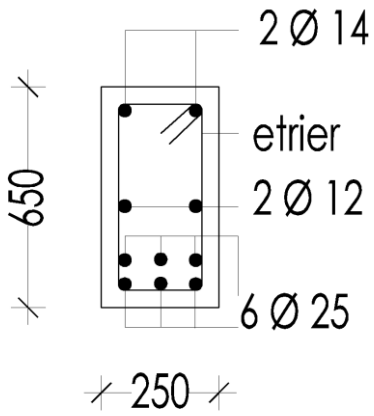


Figura 4.12 — Secțiunea armată, Exemplul 4.5.2

Concluzie

Comparând cele două exemple: secțiunea mai mică (250×650 mm) necesită, în final, mai multă armătură (29,45 cm² față de 19,63 cm²) decât secțiunea mai generoasă (350×700 mm) — o economie de beton la turnare aduce, cel mai frecvent, mai multă armătură, plus dificultatea dispunerii pe 2 rânduri. Alegerea între cele două variante ține de context (cost relativ beton/oțel, restricții de gabarit, greutate proprie etc.), dar exemplul arată importanța predimensionării.

Exemplul 4.5.3 — Consolă

Se consideră o consolă din beton armat, încastrată într-un stâlp, cu lungimea L = 3,20 m. Consola este solicitată de o încărcare uniform distribuită de calcul qd = 50,0 kN/m, de o forță concentrată F1 = 20 kN aplicată la capătul liber și de o forță concentrată F2 = 30 kN aplicată la 1,60 m de încastrare. Betonul este de clasă C25/30, armătura de tip B500, clasa de expunere XC1, clasa structurală S4, dimensiunea maximă a agregatului D_{upper} = 16 mm.

Se cere dimensionarea armăturii longitudinale de rezistență, în ipoteza de armare simplă, respectând etapele din secțiunea 4.4.

Ce se schimbă față de o grindă simplu rezemată. La consolă fibra întinsă este cea superioară, deci armătura de rezistență se dispune la partea de sus a secțiunii, iar înălțimea utilă d se măsoară de la fața superioară până la centrul de greutate al acestei armături. Momentul încovoietor are valoarea maximă în secțiunea de încastrare, nu la mijlocul deschiderii, iar forța tăietoare este tot acolo maximă. Relațiile de calcul (μ, ω, $A_{s,nec}$, M_{Rd}) rămân însă neschimbate — ele descriu echilibrul secțiunii, indiferent de unde vine momentul.

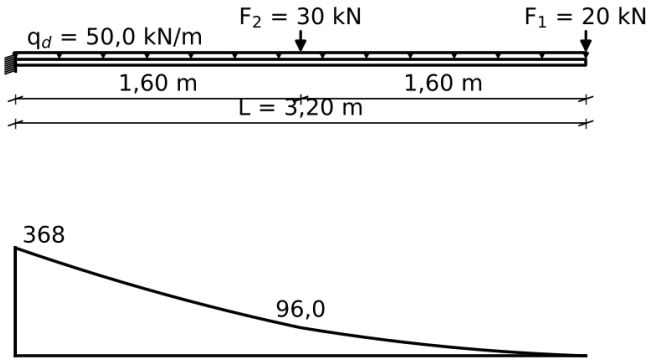


Figura 4.13 — Schema statică și diagrama de momente pentru Exemplul 4.5.3

Momentul de proiectare în secțiunea de încastrare:

$$M_{Ed} = \frac{q_d L^2}{2} + F_1 \, L + F_2 \cdot 1{,}60$$

$$M_{Ed} = \frac{50{,}0 \cdot 3{,}20^2}{2} + 20 \cdot 3{,}20 + 30 \cdot 1{,}60 = 256 + 64 + 48 = 368 \, kNm$$

Etapa 1 — Materiale (capitolul 2)

γ_C = 1,50; γ_S = 1,15. Beton C25/30: f_{ck} = 25 MPa, f_{ctm} = 2,6 MPa, f_{cd} = 16,667 MPa. Oțel B500: f_{yd} = 434,78 MPa, μ_{lim} = 0,372.

Etapa 2 — Acoperirea cu beton (capitolul 3)

Cu $\phi_{sl,est}$ = 25 mm, $\phi_{sw,est}$ = 10 mm, D_{upper} = 16 mm, clasă structurală S4 și clasa de expunere XC1 — aceleași date ca în Exemplul 3.6.2 — rezultă:

$$c_{nom,sl} = 35 \, mm \quad c_{nom,sw} = 25 \, mm \quad d_1 = 47{,}5 \, mm$$

Etapa 3 — Predimensionarea secțiunii

Condiția de săgeată se ia din Tabelul 4.1, de pe rândul „Consolă": pentru un caz obișnuit (ω_r = 0,2, încărcare utilă ≈ 45% din total) rezultă l/d = 7. Raportul este

mult mai mic decât la grinda simplu rezemată (l/d = 15), pentru că o consolă are o deformabilitate mult mai mare la aceeași lungime.

$$d_{săgeată} = \frac{3200}{7} = 457\ mm$$

Condiția de rezistență, cu lățimea orientativă b = 300 mm:

$$d_{rezistență} \geq \sqrt{\frac{M_{Ed}}{\mu_{lim}\ b\ f_{cd}}} = \sqrt{\frac{368 \cdot 10^6}{0{,}372 \cdot 300 \cdot 16{,}667}} = 445\ mm$$

Se adoptă d = max(457; 445) = 457 mm (guvernează săgeata). Înălțimea totală:

$$h = 457 + 47{,}5 = 504{,}5\ mm \rightarrow se\ adoptă\ h = 600\ mm$$

S-a ales varianta cu rezervă, rotunjind la un multiplu de 50 mm — o consolă este un element pentru care săgeata și fisurarea la partea superioară sunt mai supărătoare decât la o grindă, iar un plus de înălțime este cea mai ieftină rezervă. Se recalculează:

$$d = 600 - 47{,}5 = 552{,}5\ mm$$

Lățimea b, din condiția constructivă 2 ≤ h/b ≤ 3, rezultă 200 ≤ b ≤ 300 mm; se adoptă b = 300 mm. Secțiunea predimensionată**: b × h = 300 × 600 mm.**

Etapele 4-6 — μ, ω, $A_{s,nec}$

$$\mu = \frac{368 \cdot 10^6}{300 \cdot 552{,}5^2 \cdot 16{,}667} = 0{,}241 \leq \mu_{lim} = 0{,}372$$
$$\rightarrow armare\ simplă$$

$$\omega = 1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0{,}241} = 0{,}280$$

$$A_{s,nec} = \frac{0{,}280 \cdot 300 \cdot 552{,}5 \cdot 16{,}667}{434{,}78} = 1782\ mm^2$$

Etapa 7 — Alegerea armăturii

Armătura se dispune la partea superioară a secțiunii:

$$A_{s,eff} \;=\; 4\varnothing 25 \;=\; 19{,}63\ cm^2 \;=\; 1963\ mm^2 \;>\; 1782\ mm^2 \;\checkmark$$

Etapa 8 — Distanța între bare (capitolul 3)

$$c_s \;\geq\; max(25\,;\;16 \;+\; 5\,;\;20) \;=\; 25\ mm$$

$$b_{util} \;=\; 300 \;-\; 2 \cdot 35 \;=\; 230\ mm \qquad c_{s,eff} \;=\; \frac{230 \;-\; 4 \cdot 25}{3} \;=\; 43{,}3\ mm \;>\; 25\ mm \;\checkmark$$

Etapa 9 — Armare minimă și maximă

$$A_c \;=\; 300 \cdot 600 \;=\; 180\,000\ mm^2 \qquad k_h \;=\; 0{,}8 \;-\; 0{,}6 \cdot min(0\,;\;0{,}3) \;=\; 0{,}80$$

$$A_{s,min} \;=\; \frac{0{,}2 \cdot 0{,}80 \cdot 2{,}6 \cdot 180\,000}{500} \;=\; 150\ mm^2$$

$$A_{s,max} \;=\; 0{,}04 \cdot 180\,000 \;=\; 7200\ mm^2$$

150 mm² ≤ 1963 mm² ≤ 7200 mm² — condiție satisfăcută.

Etapa 10 — Momentul capabil M_{Rd}

$$0{,}8x\ f_{cd}\ b \;=\; A_{s,eff} f_{yd} \;\rightarrow\; x \;=\; \frac{1963 \cdot 434{,}78}{0{,}8 \cdot 16{,}667 \cdot 300} \;=\; 213{,}4\ mm$$

$$z \;=\; d \;-\; 0{,}4x \;=\; 552{,}5 \;-\; 0{,}4 \cdot 213{,}4 \;=\; 467{,}1\ mm$$

$$M_{Rd} \;=\; A_{s,eff} f_{yd}\ z \;=\; 1963 \cdot 434{,}78 \cdot 467{,}1 \;\approx\; 399\ kNm$$

Verificare finală

M_{Rd} = 399 kNm ≥ M_{Ed} = 368 kNm → SECȚIUNE VERIFICATĂ. Armare: b × h = 300 × 600 mm, 4⌀25 la partea superioară ($A_{s,eff}$ = 19,63 cm²). La partea inferioară se dispun armături constructive de montaj, iar pe fețele laterale armături intermediare, conform regulilor din secțiunea 4.2.

Observație — ancorarea armăturii de sus

La consolă armătura întinsă este la partea superioară și trebuie ancorată în elementul de reazem (stâlpul sau deschiderea alăturată), nu în consolă. Lungimea necesară este mare: barele de sus se află în condiții slabe de aderență, iar pentru ⌀25 în beton C25/30 rezultă peste 60 de diametre, adică mai mult de 1,5 m. La capătul liber al consolei bara se îndoaie în jos cu cioc, pe toată înălțimea secțiunii — o măsură constructivă, de siguranță, nu una rezultată din calcul; singură, ea poate să nu fie suficientă. Verificarea propriu-zisă a lungimii de ancorare (art. 11.4) nu face obiectul acestei lucrări și se efectuează separat.

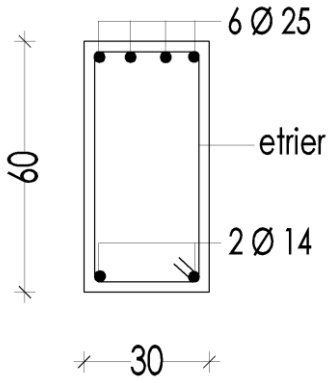


Figura 4.14 — Detaliu de armare, Exemplul 4.5.3

CAPITOLUL 5

CALCULUL LA FORȚĂ TĂIETOARE AL GRINZILOR DIN BETON ARMAT LA SLU

5.1 Introducere

Sub acțiunea încărcărilor verticale, înainte de fisurare, o grindă din beton armat se comportă elastic. În zona centrală (moment maxim, forță tăietoare minimă), eforturile unitare de întindere și compresiune sunt aproximativ paralele cu axul grinzii. Spre reazeme (moment minim, forță tăietoare maximă), traiectoria eforturilor devine tot mai înclinată.

Pe măsură ce încărcările cresc, betonul întins depășește rezistența la întindere și grinda fisurează. Fisurile sunt perpendiculare pe direcția eforturilor de întindere: fisuri verticale în zona centrală (datorate momentului încovoietor) și fisuri înclinate spre reazeme (datorate acțiunii combinate a momentului și a forței tăietoare). Creșterea forței tăietoare modifică starea de eforturi din inima grinzii și conduce la o înclinare mai pronunțată a fisurilor diagonale spre reazeme; în modelul de calcul, această variație este reprezentată prin alegerea unghiului θ al bielelor comprimate (secțiunea 5.3).

Pentru fisurile verticale, armătura care le controlează este chiar armătura longitudinală, deja dimensionată la încovoiere (capitolul 4). Pentru fisurile înclinate, este necesară o armătură suplimentară — de regulă etrieri (armătură verticală), mai rar armătură înclinată. Etrierii sunt preferați în practică datorită ușurinței de montare, care nu depinde de un unghi anume.

Nu toate elementele au nevoie de o astfel de armătură calculată: secțiunea de beton, împreună cu armătura longitudinală deja prezentă, poate fi suficientă

pentru a prelua o forță tăietoare redusă. Se disting astfel două categorii, tratate separat în continuare:

- elemente care NU necesită armătură de forfecare calculată ($\tau_{Ed} < \tau_{Rd,c}$) — secțiunea 5.2;
- elemente care necesită armătură de forfecare ($\tau_{Ed} \geq \tau_{Rd,c}$) — secțiunea 5.3, calculate cu modelul grinzii cu zăbrele.

Efort unitar τ versus forță V

SR EN 1992-1-1:2024 formulează verificările la forfecare în termeni de efort unitar tangențial τ, spre deosebire de ediția 2004, care folosea direct forța tăietoare V. Cele două formulări sunt echivalente și se pot transforma una în alta:

$$\tau = \frac{V}{b_w \cdot z} \qquad V = \tau \cdot b_w \cdot z$$

unde z este brațul de pârghie (z=0,9d). Această lucrare folosește formularea în τ, conform ediției 2024, dar orice relație poate fi tradusă direct în forțe dacă este necesar.

Mecanismele de rezistență la forfecare fără armătură specifică

Chiar și fără etrieri sau armătură înclinată, un element din beton armat poate prelua o anumită forță tăietoare, prin combinarea a trei mecanisme:

- rezistența betonului nefisurat din zona comprimată
- frecarea dintre fețele fisurii (împănarea agregatelor — engleză aggregate interlock)
- efectul de dorn al armăturii longitudinale ancorate dincolo de fisură.

Cele trei mecanisme sunt ilustrate în Figura 5.1: betonul comprimat nefisurat din zona superioară, împănarea agregatelor care limitează alunecarea relativă a fețelor fisurii și armătura longitudinală care limitează deplasarea fețelor.

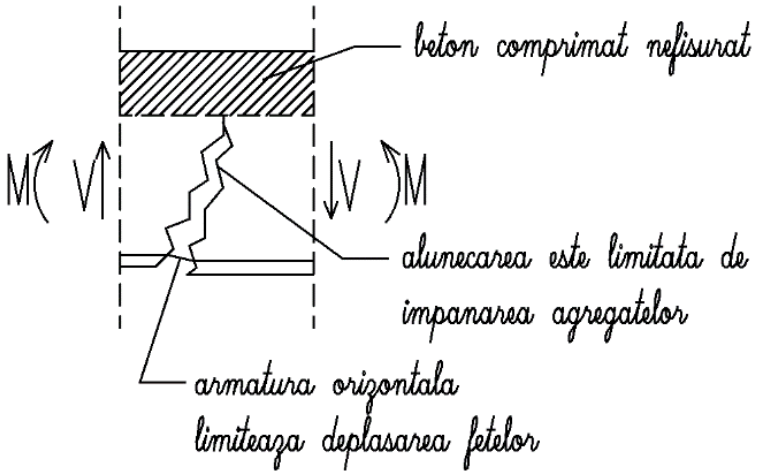


Figura 5.1 — Mecanismele de rezistență la forfecare într-un element fără armătură de forfecare

Contribuția exactă a fiecărui mecanism nu poate fi separată printr-un model matematic simplu — de aceea, rezistența rezultată, $\tau_{Rd,c}$, este o relație empirică, calibrată pe baza a mii de încercări experimentale pe elemente din beton armat (secțiunea 5.2).

5.2 Elemente fără armătură de forfecare calculată

Condiția care permite renunțarea la o armătură de forfecare calculată este $\tau_{Ed} < \tau_{Rd,c}$, unde efortul unitar de proiectare τ_{Ed} rezultă din forța tăietoare de calcul:

$$\tau_{Ed} = \frac{V_{Ed}}{b_w \cdot z} \quad ; \quad z = 0{,}9\, d$$

b_w este lățimea minimă a inimii grinzii; d este înălțimea utilă raportată la armătura de încovoiere.

Rezistența la efort unitar tangențial a unui element fără armătură de forfecare este:

$$\tau_{Rd,c} = \frac{0{,}66}{\gamma_V} \cdot \sqrt[3]{\frac{100\,\rho_l f_{ck} d_{dg}}{d}} \geq \tau_{Rdc,min}$$

γ_V=1,40 (situație persistentă/tranzitorie).

cu următoarele mărimi:

$$\rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w\, d}$$

A_{sl} este aria armăturii întinse, prelungită cu lungimea de ancorare lbd plus înălțimea utilă d dincolo de secțiunea de calcul (practic: la o grindă simplu rezemată, armătura de jos; la o consolă, armătura de sus), presupunând că această armătură este suficient ancorată.

$$d_{dg} = 16\,mm + D_{lower} \leq 40\,mm \quad (pentru\ f_{ck} \leq 60\,MPa)$$

d_{dg} este un parametru care descrie rugozitatea suprafeței de cedare

D_{lower} este dimensiunea sitei de cernere sub cea mai mare fracțiune de agregat, care se poate aproxima, în lipsa unei informații mai precise, cu dimensiunea maximă a agregatului (de exemplu, D_{lower}≈16 mm).

Valoarea $\tau_{Rd,c}$ nu poate fi mai mică decât un prag minim, independent de armătura longitudinală:

$$\tau_{Rdc,min} = \frac{11}{\gamma_V} \cdot \sqrt{\frac{f_{ck}}{f_{yd}} \cdot \frac{d_{dg}}{d}}$$

f_{yd} este rezistența de calcul a armăturii folosite la dimensionarea la încovoiere (capitolul 4).

Practic

Plăcile sunt, în general, elementele pentru care se urmărește evitarea armăturii de forfecare (montarea etrierilor într-o placă este dificilă): dacă τ_{Ed} nu respectă condiția, se preferă mărirea grosimii plăcii sau a clasei de beton.

La grinzi, în cazurile în care este necesară armătură de forfecare sau de torsiune, se asigură în plus armătura transversală minimă $\rho_{w,min}$ (secțiunea 5.4) — condiția din această secțiune elimină doar necesitatea unui calcul explicit al ariei de etrieri.

5.3 Elemente cu armătură de forfecare — modelul grinzii cu zăbrele

Când $\tau_{Ed} \geq \tau_{Rd,c}$, este necesară o armătură de forfecare calculată. SR EN 1992-1-1:2024 folosește pentru dimensionare un model clasic — modelul grinzii cu zăbrele (analogia Ritter-Mörsch) — în care grinda reală, fisurată, se echivalează cu o grindă cu zăbrele formată din patru tipuri de elemente:

- talpa comprimată — betonul comprimat rezultat din încovoierea grinzii
- talpa întinsă — armătura longitudinală întinsă
- diagonale comprimate — bielele (dinții) înclinați de beton dintre fisurile succesive;
- montanți întinși — etrierii.

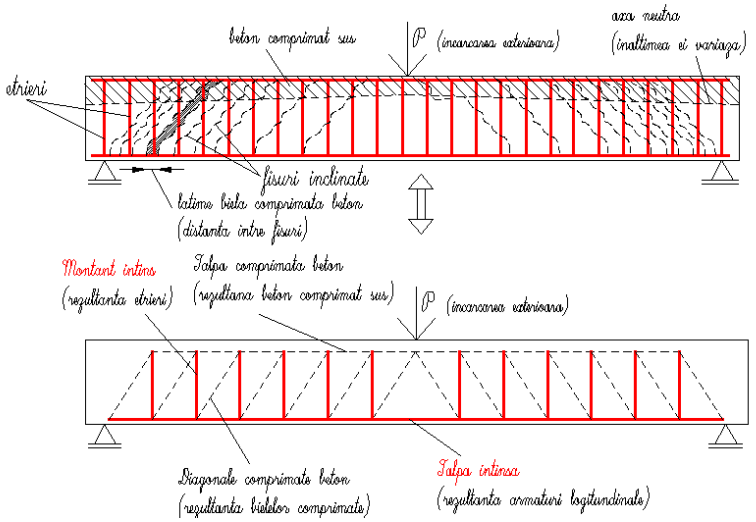


Figura 5.2 — Modelul grinzii cu zăbrele pentru calculul la forță tăietoare

Modelul original al lui Ritter și Mörsch folosea un unghi θ fix de 45°, ales din motive practice: cu patru necunoscute (efortul din diagonală, efortul din montant, efortul din tălpi și unghiul θ) și doar trei ecuații de echilibru disponibile, problema este static nedeterminată — unghiul trebuie ales, nu rezultă din calcul. Cercetările ulterioare au arătat că cedarea reală poate implica unghiuri mai mici (bielele se înclină mai tare pe măsură ce etrierii curg), ceea ce a condus, în edițiile moderne ale Eurocodului, la modelul cu unghi variabil, folosit și în această lucrare: θ nu mai este fixat la 45°, ci poate fi ales de proiectant în intervalul stabilit prin teorema limită inferioară a plasticității, permițând o proiectare mai economică a etrierilor.

$$1 \leq cot\theta \leq 2{,}5$$

În această grindă cu zăbrele trebuie verificate două condiții independente: rezistența la compresiune a diagonalelor de beton (C1) și rezistența la curgere a montanților din oțel — etrierii (C2).

C1. Rezistența la compresiune a diagonalelor de beton

Se analizează o porțiune a grinzii cu zăbrele și se identifică rezultantele eforturilor. Efortul de compresiune din bielele înclinate se notează σ_c; rezultanta acestui efort pe suprafața bielei este Fci (componenta înclinată, de-a lungul bielei), iar Fcv este componenta ei verticală.

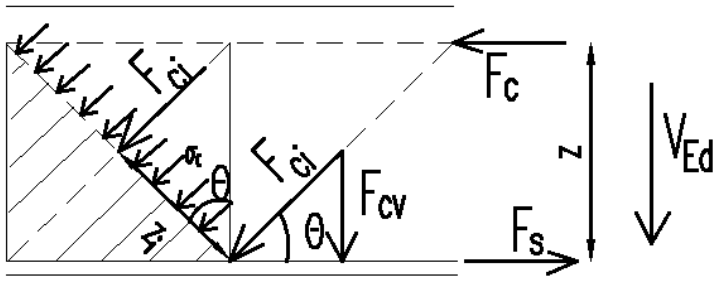


Figura 5.3 — Rezultantele eforturilor în biela de beton comprimată

Echilibrul pe verticală al unui „panou” al grinzii cu zăbrele (porțiunea dintre doi montanți vecini) impune ca întreaga forță tăietoare din acea zonă să fie preluată de componenta verticală a bielei comprimate:

$$F_{cv} = F_{ci} \cdot sin\theta = V_{Ed}$$

de unde rezultă direct forța din biela înclinată:

$$F_{ci} = \frac{V_{Ed}}{sin\theta}$$

Biela transmite acest efort pe o suprafață înclinată, lățimea grinzii este b_w, iar „grosimea” bielei, măsurată perpendicular pe axa ei, rezultă egală cu $z \cdot cos\theta$ (proiecția, pe direcția perpendiculară pe bielă, a înălțimii z dintre tălpi). Aria secțiunii bielei este, prin urmare, $b_w \cdot z \cdot cos\theta$, iar efortul unitar de compresiune din bielă:

$$\sigma_c = \frac{F_{ci}}{b_w\, z\, cos\theta} = \frac{V_{Ed}}{b_w\, z\, sin\theta\, cos\theta}$$

Folosind identitatea trigonometrică $sin\theta \cdot cos\theta = 1/(cot\theta + tan\theta)$ și împărțind ambii membri la $b_w \cdot z$ (pentru a trece de la forțe la eforturi unitare), rezultă:

$$\sigma_c = \tau_{Ed} \cdot (cot\theta + tan\theta)$$

Condiția de rezistență la rupere a bielei (σ_c nu poate depăși rezistența de calcul a betonului la compresiune, redusă cu factorul v=0,5, care ține cont de fisurarea înclinată a bielei) conduce direct la formula folosită în proiectare:

$$\sigma_{cd} = \tau_{Ed}(cot\theta + tan\theta) \leq \nu \cdot f_{cd}$$

Se admite v=0,5 atunci când unghiul θ este ales în intervalul precizat mai jos.

C2. Rezistența la curgere a etrierilor

Se consideră o secțiune înclinată, paralelă cu bielele de beton, care „taie” toți montanții (etrierii) situați pe lungimea ei orizontală. Din geometria triunghiului format de biela înclinată cu unghiul θ și înălțimea z, această lungime orizontală este $z \cdot cot\theta$.

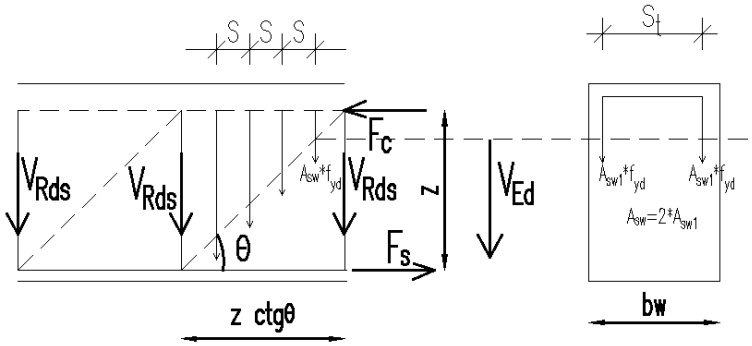


Figura 5.4 — Etrierii tăiați de o secțiune înclinată cu θ, pe lungimea z·cotθ

Numărul de etrieri cuprinși pe această lungime, la o distanță s între ei, este z·cotθ/s. Fiecare etrier, ajuns la curgere, dezvoltă o forță $A_{sw}\cdot f_{ywd}$ (A_{sw} fiind aria însumată a ambelor brațe ale unui etrier). Rezultanta forțelor din toți etrierii „tăiați" trebuie să echilibreze forța tăietoare din acea zonă:

$$V_{Rd,s} = \frac{z\ cot\theta}{s} \cdot A_{sw} \cdot f_{ywd}$$

Împărțind ambii membri la $b_w\cdot z$ și folosind $\rho_w=A_{sw}/(b_w\cdot s)$:

$$\tau_{Rd,s} = \frac{V_{Rd,s}}{b_w\ z} = \frac{A_{sw}\ cot\theta}{s\ b_w} \cdot f_{ywd} = \rho_w \cdot f_{ywd} \cdot cot\theta$$

f_{ywd} este rezistența de calcul a etrierului (f_{yd})

ρ_w este coeficientul de armare cu etrieri

Condiția de dimensionare (etrierii trebuie să poată prelua efortul unitar de proiectare) este $\tau_{Rd,s}\geq\tau_{Ed}$ — de unde rezultă distanța maximă admisă între etrieri, pentru un diametru și un unghi θ alese:

$$s \leq \frac{A_{sw}\ cot\theta\ f_{ywd}}{b_w\ \tau_{Ed}}$$

Alegerea unghiului θ — intervalul admis

Unghiul θ dintre bielele comprimate și axul grinzii nu este liber — SR EN 1992-1-1:2024 impune un interval:

$$1 \leq cot\theta \leq 2{,}5$$

pentru elemente armate obișnuit (fără forță axială semnificativă), cu armătură de forfecare din clasa de ductilitate B sau C.

Observații:

- pentru armătură de forfecare din clasa de ductilitate A (mai puțin ductilă — a se vedea capitolul 2), limita superioară a cotθ se reduce cu 20% (deci cotθ≤2,0 în loc de 2,5)
- pentru elemente supuse unei forțe axiale de compresiune semnificative (efort unitar mediu ≥3 MPa), limita superioară poate ajunge la cotθ=3,0, cu condiții suplimentare privind adâncimea zonei comprimate — situație care nu apare la grinzile obișnuite tratate în această lucrare.

Mecanismul fizic din spatele acestui interval: dacă etrierii curg, bielele de beton se pot roti și se înclină mai tare (θ scade, cotθ crește) — se activează astfel din ce în ce mai mulți etrieri de-a lungul lungimii z·cotθ, înainte ca betonul să se zdrobească. Acest proces conduce la o cedare treptată și avertizată (ductilă).

Figura 5.5 compară cele două situații extreme ale intervalului: la cotθ=2,5 (θ=21,8°) secțiunea înclinată taie un număr mare de etrieri, dar biela de beton este mai solicitată; la cotθ=1 (θ=45°) sunt tăiați mai puțini etrieri, în schimb biela lucrează în condiții mai favorabile.

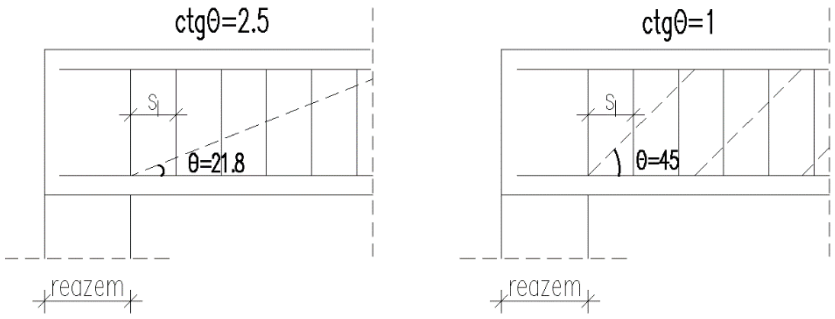


Figura 5.5 — Influența unghiului ϑ asupra numărului de etrieri tăiați de secțiunea înclinată

Unghiul economic θ

La aceeași armare cu etrieri, alegerea cotθ=2,5 (față de cotθ=1) mărește $\tau_{Rd,s}$ (mai mulți etrieri „activi"), dar scade $\tau_{Rd,max}$ — rezistența diagonalelor de beton. Situația ideală de proiectare este atunci când etrierii curg exact în momentul zdrobirii betonului — niciunul dintre cele două materiale nu este supra- sau subdimensionat. Această condiție ($\tau_{Rd,s}=\tau_{Rd,max}$) conduce la valoarea economică a lui cotθ:

$$\rho_w \cdot f_{ywd} \cdot cot\theta = \frac{\nu \cdot f_{cd}}{cot\theta + tan\theta}$$

Rezolvând această ecuație în raport cu cotθ (ecuație de gradul 2, folosind cotθ·tanθ=1):

$$cot\theta^2 = \frac{\nu \cdot f_{cd}}{\rho_w \cdot f_{ywd}} - 1$$

$$cot\theta = \sqrt{\frac{\nu \cdot f_{cd}}{\rho_w \cdot f_{ywd}} - 1}$$

Valoarea rezultată trebuie să respecte în continuare intervalul 1≤cotθ≤2,5. Dacă rezultă cotθ>2,5, se alege limita 2,5; dacă rezultă cotθ<1, secțiunea trebuie mărită.

Cunoscând cotθ, rezistența finală a grinzii cu etrieri la forță tăietoare este dată de capacitatea etrierilor:

$$\tau_{Rd} = \tau_{Rd,s} = \rho_w \cdot f_{ywd} \cdot cot\theta \geq \tau_{Ed}$$

cu limita superioară (nu se poate depăși, indiferent de cât de multă armătură se adaugă), dată de zdrobirea betonului la cotθ=1:

$$\tau_{Rd,s} \leq \frac{\nu \cdot f_{cd}}{2}$$

5.4 Reguli de armare la forță tăietoare

Coeficientul minim de armare transversală

În elementele pentru care este necesară armătură de forfecare sau de torsiune, coeficientul de armare transversală trebuie să respecte un minim:

$$\rho_{w,min} = 0{,}08 \cdot \frac{\sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}}$$

Este permisă reducerea acestei valori cu 10% pentru armătură din clasa de ductilitate B și cu 20% pentru clasa C.

Distanțe minime și maxime între etrieri

Distanța de-a lungul grinzii (sl) și distanța transversală între brațele etrierului (st) trebuie să respecte:

Condiție	Valoare
$s_{l,max}$ (longitudinal, etrieri verticali)	0,75d
$s_{t,max}$ (transversal, între brațe)	0,75d ≤ 600 mm
sl,min	≈ 50 mm (acces vibrator)

Formula generală este $s_{l,max}$=0,75d(1+cotα), unde α este unghiul dintre armătura de forfecare și axul grinzii dar pentru etrieri verticali (α=90°, cotα=0) rezultă $s_{l,max}$=0,75d, ca în tabel.

Observație

Multe cursuri și proiecte mai vechi (bazate pe SR EN 1992-1-1:2004 sau pe practica anterioară) folosesc, pe lângă sl≤0,75d, și o plafonare absolută sl≤300 mm. Tabelul 12.1 (NDP) al SR EN 1992-1-1:2024, nu conține o astfel de plafonare absolută pentru sl — doar condiția proporțională 0,75d(1+cotα). Similar, plafonul de 350 mm pentru st, prezent în versiuni anterioare, nu mai apare în ediția 2024 — rămâne doar condiția st≤0,75d≤600 mm.

Forma și diametrul etrierilor

Etrierii pot fi închiși (cu ramură superioară) sau deschiși (fără ramură superioară). Se preferă etrierii închiși, care contribuie și la preluarea torsiunii și leagă armăturile longitudinale superioare; etrierii deschiși se folosesc atunci când torsiunea nu este o problemă, la etrierii interiori (suplimentari, la secțiuni late), la grinzi T sau în zone cu armătură aglomerată, unde lipsa ramurii superioare facilitează turnarea betonului.

Diametrele uzuale sunt 6, 8, 10 și 12 mm; diametrul de 6 mm nu se fabrică în mod curent și se evită în proiectare. Nu există o limită superioară normativă a diametrului, dar diametrele mari conduc la distanțe mari între etrieri, care pot intra în conflict cu sl,max.

Pe lângă etrierul propriu-zis, care înconjoară întreaga secțiune, se folosesc frecvent agrafe — armături transversale scurte, cu ciocuri la ambele capete, care leagă o bară longitudinală intermediară de restul carcasei. Figura 5.6 arată cele două tipuri.

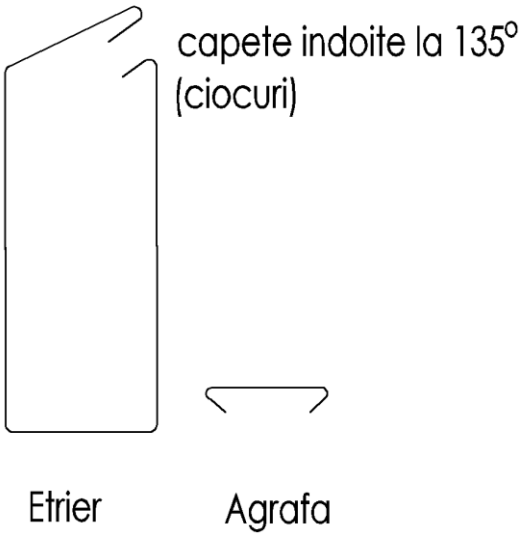


Figura 5.6 — Etrier închis și agrafă, ambele cu capete îndoite la 135° (ciocuri)

Ancorarea etrierilor — lungimea ciocului

Etrierii și agrafele nu se ancorează prin lungime de aderență, ca armătura longitudinală, ci prin ciocuri la capete. SR EN 1992-1-1:2024 definește ciocul ca partea de capăt a unei armături, îndoită la cel puțin 135°. Ancorarea armăturilor de forfecare se realizează prin îndoiri, ciocuri, capete de ancorare sau armături transversale sudate. Standardul cere, în plus, ca în interiorul fiecărui cioc de capăt și la fiecare colț al etrierului să existe o bară longitudinală, cu diametrul cel puțin egal cu al etrierului — bara longitudinală este cea care „blochează" efectiv ciocul în masa betonului.

Geometria ciocului este determinată de două mărimi:

- diametrul minim al dornului de îndoire, $\phi_{mand,min}$ = 4ϕ pentru ϕ≤16 mm și 7ϕ pentru ϕ>16 mm — necesar pentru a nu zdrobi betonul din interiorul curburii și a nu fisura bara la îndoire
- porțiunea dreaptă de după îndoire, de cel puțin 5ϕ pentru ciocul standard la 135° (respectiv cel puțin 10ϕ pentru o îndoire la 90°), conform figurii 11.6 din standard.

Lungimea desfășurată a ciocului, măsurată pe axa barei (utilă la extrasul de armătură), se obține însumând lungimea arcului de îndoire cu porțiunea dreaptă:

$$l_{cioc} = r \cdot \alpha + 5\emptyset \qquad r = \frac{\emptyset_{mand,min}}{2} + \frac{\emptyset}{2}$$

unde r este raza axei barei îndoite, iar α este unghiul de îndoire exprimat în radiani (135° = 3π/4 = 2,356 rad).

Exemplu numeric — etrier ϕ8 cu cioc la 135°

$$\emptyset_{mand,min} = 4\emptyset = 4 \cdot 8 = 32\,mm \quad r = \frac{32}{2} + \frac{8}{2} = 20\,mm$$

$$arc = r \cdot \alpha = 20 \cdot 2{,}356 = 47{,}1\,mm$$

$$porțiune\ dreaptă = 5\emptyset = 5 \cdot 8 = 40\,mm$$

$$l_{cioc} = 47{,}1 + 40 = 87{,}1\,mm \rightarrow se\ adoptă\ 90\,mm$$

Pentru un etrier ϕ10, același calcul conduce la $\phi_{mand,min}$=40 mm, r=25 mm, arc=58,9 mm, porțiune dreaptă=50 mm, deci lcioc≈109 mm (se adoptă 110 mm). Aceste lungimi se adaugă, la fiecare capăt, la perimetrul etrierului, pentru stabilirea lungimii totale de debitare a barei.

Poziționarea ciocurilor

Ancorarea etrierilor (ciocurile) se poziționează, în general, în zona comprimată a secțiunii, unde betonul este integru și poate prelua presiunea de contact din interiorul curburii. Etrierii închiși cu ciocuri la 135° pot fi folosiți atât în zona întinsă, cât și în cea comprimată.

Dispunerea economică a etrierilor pe lungimea grinzii

Diagrama de forță tăietoare a unei grinzi nu este, în general, constantă pe toată deschiderea — la o grindă simplu rezemată, încărcată uniform distribuit, V_{Ed} este maxim la reazeme și minim la mijlocul deschiderii. Este economic să se profite de această variație:

- etrieri „deși” (calculați, la distanța s rezultată din secțiunea 5.3) în zonele cu forță tăietoare mare, de regulă spre reazeme;
- etrieri „rari”, la distanța maximă permisă de armătura minimă, în zonele cu forță tăietoare mică, de regulă spre mijlocul deschiderii, acolo unde $\tau_{Ed}<\tau_{Rd,c}$.

Zona cu etrieri deși se extinde de la capătul grinzii până în punctul în care V_{Ed} (din diagrama de calcul static) scade sub $V_{Rd,c}=\tau_{Rd,c}\cdot b_w\cdot z$ — capacitatea grinzii fără etrieri calculați. Figura 5.7 ilustrează acest principiu pentru o grindă încărcată uniform distribuit.

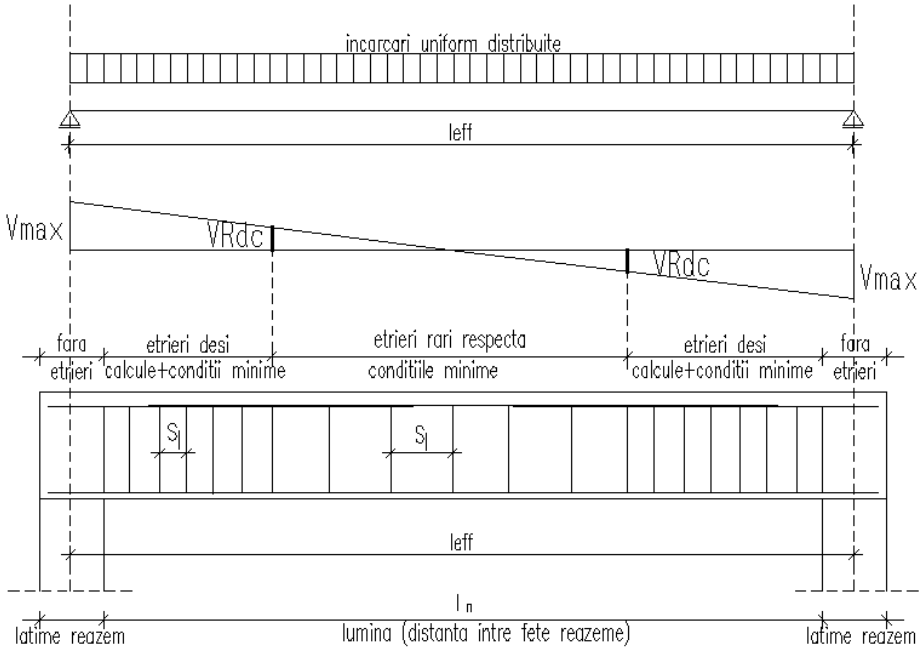


Figura 5.7 — Dispunerea etrierilor la o grindă cu încărcare uniform distribuită

Dacă grinda este încărcată majoritar cu forțe concentrate, diagrama de forță tăietoare variază în trepte și rămâne relativ constantă între punctele de aplicare a forțelor; în acest caz, este posibil ca etrierii calculați să fie necesari pe toată deschiderea (Figura 5.8).

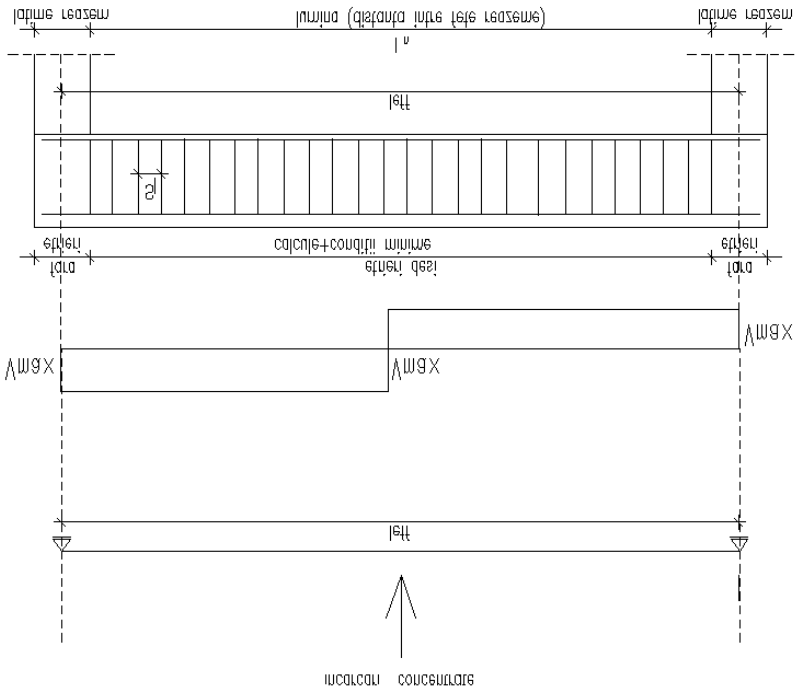


Figura 5.8 — Dispunerea etrierilor la o grindă cu încărcări concentrate

În cazul mixt — încărcare uniform distribuită suprapusă peste forțe concentrate — diagrama combină cele două forme, iar zonele cu etrieri deși se stabilesc, ca și înainte, din intersecția diagramei V_{Ed} cu valoarea $V_{Rd,c}$ (Figura 5.9).

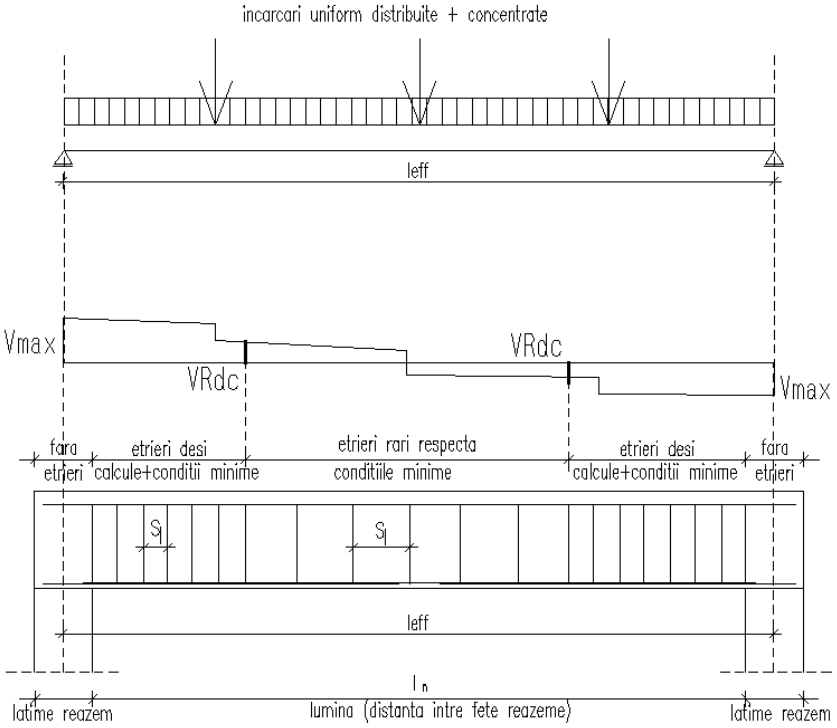


Figura 5.9 — Dispunerea etrierilor la o grindă cu încărcare mixtă (uniform distribuită și concentrată)

5.5 Reducerea forței tăietoare de calcul lângă reazeme

O parte din încărcarea aplicată aproape de reazem se transmite direct la reazem printr-o bielă de beton comprimat, fără să „traverseze” complet secțiunea de calcul de la 5.2-5.3. Fenomenul se explică prin traiectoriile eforturilor principale din grindă: eforturile de compresiune se organizează sub forma unui arc care descarcă direct pe reazeme, iar cele de întindere sub forma unor „cabluri suspendate” între reazeme (Figura 5.10).

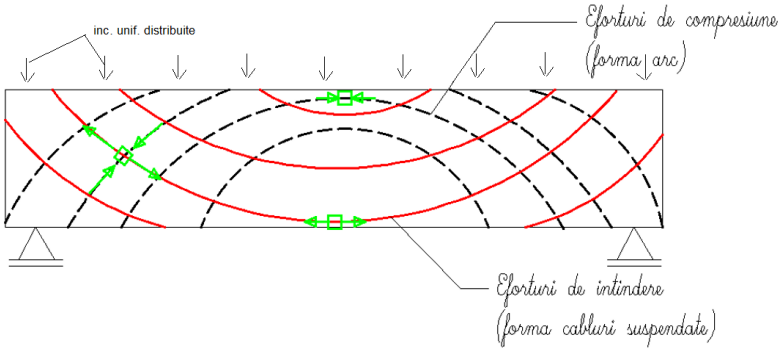


Figura 5.10 — Traiectoriile eforturilor principale: efectul de arc care descarcă direct pe reazem

SR EN 1992-1-1:2024 permite, în anumite condiții, reducerea forței tăietoare de calcul folosite la verificare — deși etrierii se dispun în continuare până la fața reazemului, indiferent de această reducere (Figura 5.11).

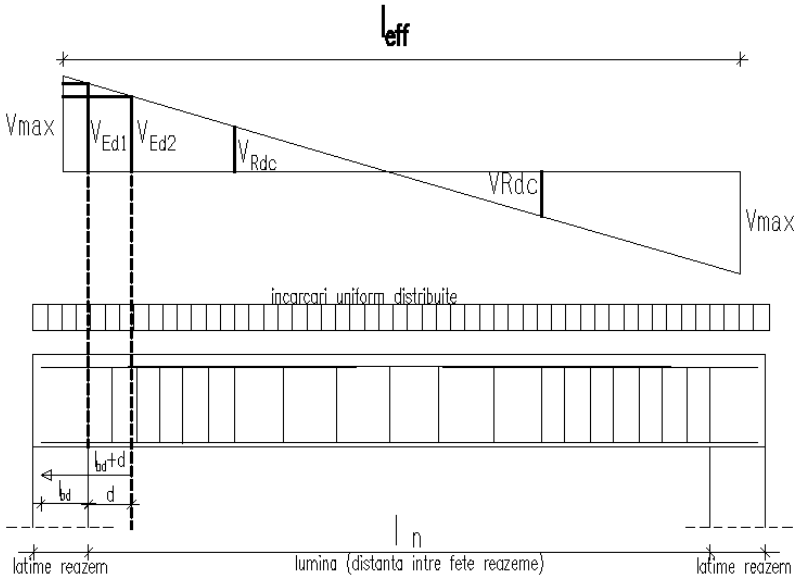


Figura 5.11 — Reducerea forței tăietoare de calcul lângă reazem

- $V_{Ed,redus}$ 1 — se ține cont de lățimea reazemului, reducând valoarea de calcul de la V_{max} (obținută pe schema statică, cu deschiderea l_{eff}) la valoarea de la fața interioară a reazemului;
- $V_{Ed,redus}$ 2 — pentru elemente cu încărcări uniform distribuite, este permisă considerarea valorii minime a lui V_{Ed} de pe lungimea $z \cdot \cot\theta$ ($=0{,}9d \cdot \cot\theta$). Cazul cel mai defavorabil pentru această lungime este $\cot\theta=1$, deci, conservator, se poate considera V_{Ed} la o distanță aproximativ egală cu d de la marginea reazemului.

5.6 Etapele de calcul

Figura 5.12 rezumă algoritmul de dimensionare la forță tăietoare într-o schemă logică; detalierea fiecărei etape urmează imediat după figură.

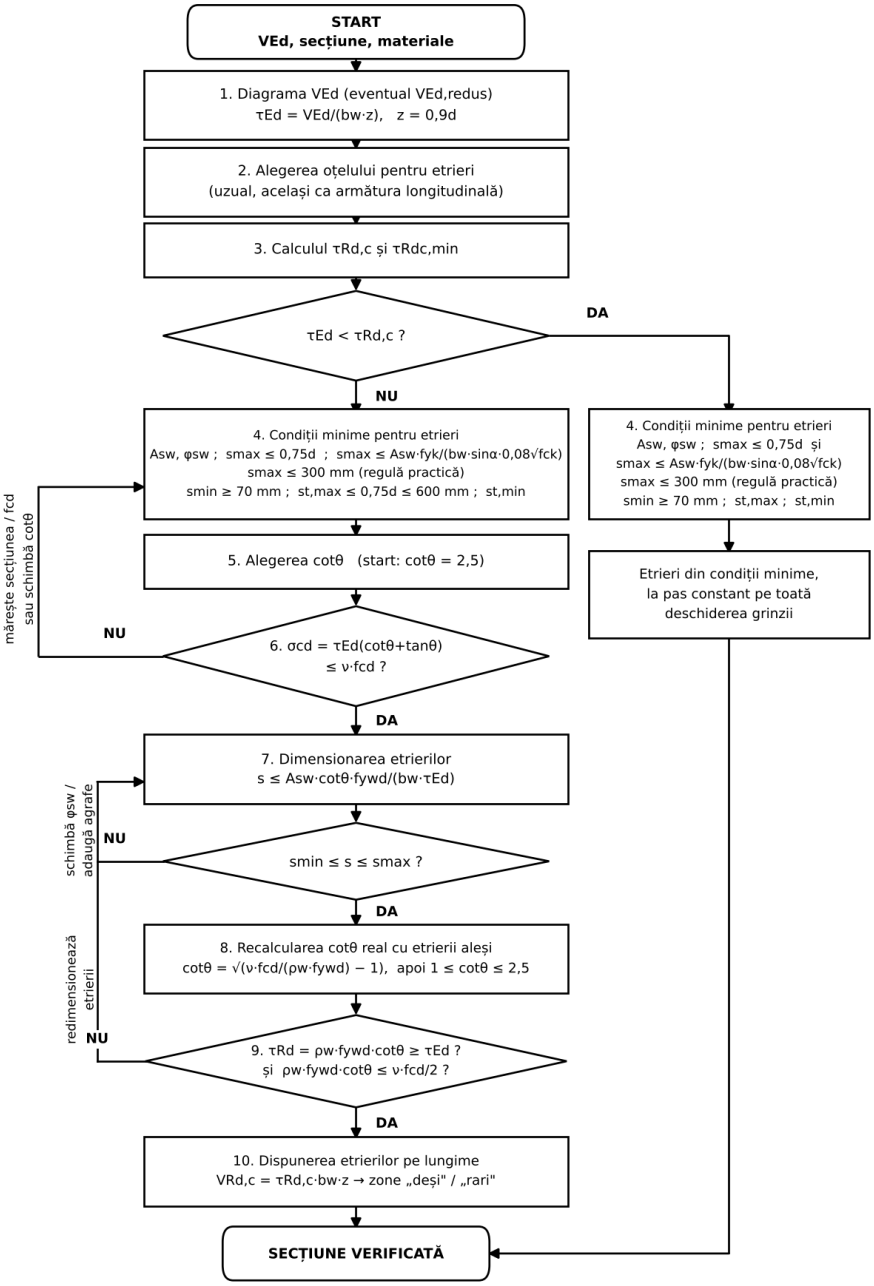


Figura 5.12 — Schema logică a algoritmului de dimensionare la forță tăietoare

1. Diagrama de forță tăietoare și efortul unitar τ_{Ed}

Se trasează diagrama de forță tăietoare din calculul static. Se adoptă $V_{Ed}=V_{max}$ sau, dacă sunt îndeplinite condițiile de la secțiunea 5.5, o valoare redusă $V_{Ed,redus}$. Efortul unitar de forfecare pe secțiunea transversală este:

$$\tau_{Ed} = \frac{V_{Ed}}{b_w \cdot z} \qquad z = 0{,}9\,d$$

2. Alegerea oțelului pentru etrieri

De obicei se alege același oțel ca cel folosit pentru armătura longitudinală întinsă, rezultând $f_{ywd}=f_{yd}$.

3. Este necesară armătură de forfecare calculată?

Se calculează efortul de forfecare capabil, preluat de secțiunea de beton împreună cu armătura longitudinală:

$$\tau_{Rd,c} = \frac{0{,}66}{\gamma_V} \cdot \sqrt[3]{\frac{100\,\rho_l f_{ck} d_{dg}}{d}} \geq \tau_{Rdc,min}$$

$$\tau_{Rdc,min} = \frac{11}{\gamma_V} \cdot \sqrt{\frac{f_{ck}}{f_{yd}} \cdot \frac{d_{dg}}{d}}$$

Dacă $\tau_{Rd,c}$ calculat cu prima relație nu depășește pragul minim, se adoptă $\tau_{Rd,c}=\tau_{Rdc,min}$. Mărimile care intervin:

- $\gamma_V=1{,}4$ — coeficientul parțial de siguranță pentru verificarea la forță tăietoare;
- f_{yd} — limita de curgere de calcul a armăturii longitudinale;
- $d_{dg}=16\text{ mm}+D_{lower}\leq 40\text{ mm}$ — parametrul de rugozitate a suprafeței de rupere; D_{lower} se poate adopta egal cu dimensiunea maximă a agregatului (uzual 16 mm);
- $\rho_l=A_{sl}/(b_w \cdot d)$ — A_{sl} este aria armăturii întinse, prelungită cu lbd+d dincolo de secțiunea de calcul (practic, la o grindă simplu rezemată, armătura de jos; la o consolă, armătura de sus, presupuse suficient ancorate).

Interpretarea rezultatului

Dacă $\tau_{Ed}<\tau_{Rd,c}$, etrierii se dispun numai din condiții minime (etapa 4) și se trece direct la desenul final. Dacă $\tau_{Ed}\geq\tau_{Rd,c}$, etrierii se dimensionează prin calcul (etapele 5-9), respectând în același timp și condițiile minime de la etapa 4.

4. Condiții minime pentru etrieri

Aceste condiții se respectă pe toată lungimea grinzii, inclusiv de către etrierii rezultați din calcul. A_{sw} este aria armăturilor de forță tăietoare din secțiunea transversală (suma ariilor brațelor verticale tăiate de secțiune); pentru un etrier obișnuit cu două brațe, $A_{sw}=2\cdot\pi\phi_{sw}^2/4$, iar dacă se adaugă agrafe sau etrieri interiori, se însumează toate brațele verticale.

Diametrele uzuale sunt ϕ_{sw}=8, 10 sau 12 mm. Pentru etrieri verticali, α=90°, deci sinα=1.

Distanța longitudinală între etrieri (în lungul grinzii) trebuie să respecte simultan:

$$s_{max} \leq 0{,}75\,d \qquad s_{max} \leq 300\,mm$$

$$s_{max} \leq \frac{A_{sw} f_{yk}}{b_w\,sin\alpha \cdot 0{,}08\sqrt{f_{ck}}}$$

A doua relație rezultă din condiția de armare minimă $\rho_w\geq\rho_{w,min}=0{,}08\sqrt{f_{ck}}/f_{yk}$, rescrisă în raport cu s, pornind de la $\rho_w=A_{sw}/(b_w\cdot s\cdot sin\alpha)$.

$$s_{min} \geq 50\,mm + 20\,mm = 70\,mm$$

(spațiu necesar pentru vibrarea betonului, plus o toleranță de execuție).

Distanța transversală între ramurile verticale, în secțiune, trebuie să respecte:

$$s_{t,max} \leq 0{,}75\,d \qquad s_{t,max} \leq 600\,mm$$

$$s_{t,min} \geq max\{\varphi_{sw}\,;\, D_{upper} + 5\,mm\,;\, 20\,mm\}$$

Despre plafonul de 300 mm

Anexa Națională la SR EN 1992-1-1:2004 și practica de proiectare din România folosesc, în plus, o plafonare absolută sl≤300 mm. Tabelul 12.1 (NDP) al ediției 2024 nu mai conține această plafonare, iar nici P100-1 nu o impune. Ea rămâne însă o condiție practică rezonabilă, mai restrictivă decât cele două relații de mai sus, și este adoptată ca atare în toate exemplele din această lucrare.

5. Alegerea unghiului θ

Se alege cotθ respectând intervalul 1≤cotθ≤2,5. Se poate începe cu varianta cotθ=2,5 (θ=21,8°), care conduce la armarea cea mai economică cu etrieri, dacă nu există alte cerințe (de exemplu, prevederi ale normativului seismic P100, care pot impune o altă valoare).

6. Verificarea diagonalelor comprimate de beton

Se verifică efortul unitar de compresiune din bielele de beton:

$$\sigma_{cd} = \tau_{Ed}(cot\theta + tan\theta) \leq \nu \cdot f_{cd} \qquad \nu = 0{,}5$$

Dacă această condiție nu este îndeplinită, se mărește secțiunea sau clasa betonului (f_{cd}) până când verifică, sau se alege o altă valoare pentru cotθ și se reia verificarea. Această etapă se face înaintea dimensionării etrierilor: dacă bielele de beton nu rezistă, nicio cantitate de armătură transversală nu poate compensa.

7. Dimensionarea etrierilor

Se verifică ca efortul preluat de etrieri să acopere efortul de proiectare:

$$\tau_{Rd,s} = \rho_w \cdot f_{ywd} \cdot cot\theta \geq \tau_{Ed} \qquad \rho_w = \frac{A_{sw}}{b_w \cdot s}$$

Se impune diametrul ϕ_{sw} (se poate începe cu 8 mm) și se scoate distanța s din inegalitatea de mai sus:

$$s \leq \frac{A_{sw}\, cot\theta\, f_{ywd}}{b_w\, \tau_{Ed}}$$

- dacă $s<s_{min}$ (etapa 4), diametrul ales este prea mic — se alege un ϕ_{sw} mai mare și/sau se adaugă etrieri interiori ori agrafe
- dacă $s>s_{max}$ (etapa 4), diametrul ales este prea mare — se alege un ϕ_{sw} mai mic sau se adoptă s_{max} pe toată lungimea.

8. Recalcularea unghiului θ real, cu etrierii aleși

Cu armătura efectiv adoptată, se determină unghiul real la care s-ar produce curgerea simultană a etrierilor și zdrobirea betonului, din egalitatea $\tau_{Rd,s}=\tau_{Rd,max}$:

$$\rho_w f_{ywd}\, cot\theta = \frac{\nu\, f_{cd}}{cot\theta + tan\theta} \quad \rightarrow \quad cot\theta = \sqrt{\frac{\nu\, f_{cd}}{\rho_w f_{ywd}} - 1}$$

Se verifică apoi $1 \leq cot\theta \leq 2{,}5$; dacă valoarea rezultată iese din interval, se adoptă limita cea mai apropiată (de exemplu, pentru $cot\theta=3{,}8$ se adoptă $cot\theta=2{,}5$; pentru $cot\theta=0{,}8$ se adoptă $cot\theta=1$).

9. Capacitatea portantă finală la forță tăietoare

Se calculează capacitatea finală, considerând că ruperea se produce prin curgerea simultană a etrierilor și zdrobirea betonului din diagonalele comprimate:

$$\tau_{Rd} = \rho_w \cdot f_{ywd} \cdot cot\theta \geq \tau_{Ed}$$

cu condiția suplimentară, care nu poate fi depășită indiferent de cantitatea de armătură:

$$\rho_w \cdot f_{ywd} \cdot cot\theta \leq \frac{\nu \cdot f_{cd}}{2}$$

Termenul $\nu \cdot f_{cd}/2$ este rezistența maximă posibilă a bielelor comprimate, obținută înlocuind $cot\theta=1$ în relația $\nu \cdot f_{cd}/(cot\theta+tan\theta)$ — valoarea care dă rezistența maximă. Dacă această condiție nu verifică, se redimensionează secțiunea sau etrierii.

10. Dispunerea etrierilor pe lungimea grinzii

Se stabilesc zonele cu etrieri „deși” (calculați) și „rari” (din condiții minime), comparând diagrama V_{Ed} cu valoarea capabilă fără etrieri calculați:

$$V_{Rd,c} = \tau_{Rd,c} \cdot b_w \cdot z$$

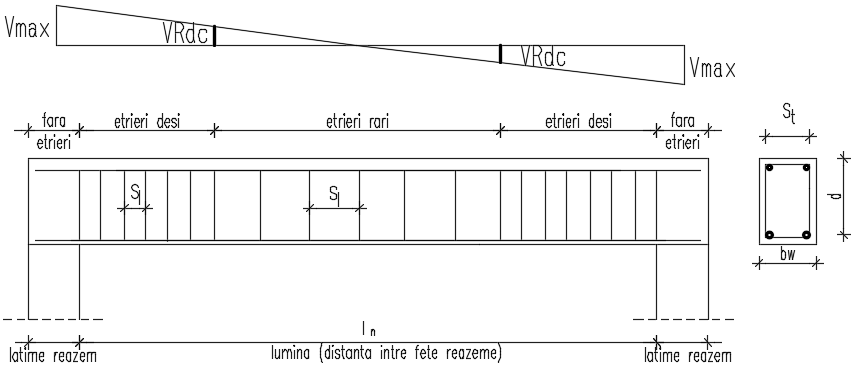


Figura 5.13 — Dispunerea etrierilor pe lungimea grinzii: zone cu etrieri deși și cu etrieri rari

Dacă etrierii rezultă integral din condiții minime, se dispun peste tot la aceeași distanță (a se vedea Figurile 5.7-5.9).

5.7 Exemple de calcul

Exemplul 5.7.1 — Reducerea forței tăietoare lângă reazem

O grindă simplu rezemată, cu deschiderea l_{eff}=6,00 m, este solicitată de o încărcare uniform distribuită de calcul qd=100 kN/m. Lățimea reazemului este de 300 mm. Înălțimea utilă la încovoiere este d=450 mm (h=500 mm, d1=50 mm). Calculați forța tăietoare redusă la fața reazemului și la distanța d de la fața reazemului.

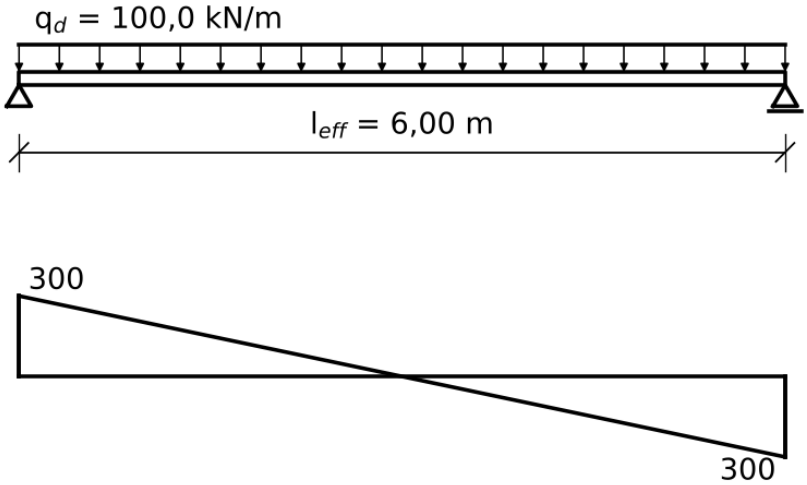


Figura 5.14 — Schema statică și diagrama de forță tăietoare, Exemplul 5.7.1

Forța tăietoare maximă (pe schema statică, la axul reazemului):

$$V_{max} = \frac{q_d l_{eff}}{2} = \frac{100 \cdot 6}{2} = 300\ kN$$

Reducerea la fața reazemului (se scade încărcarea de pe jumătate din lățimea reazemului, 150 mm):

$$V_{Ed,redus\,1} = 300 - 100 \cdot 0{,}15 = 285\ kN$$

Reducerea suplimentară la distanța d=450 mm de la fața reazemului (încărcare uniform distribuită):

$$V_{Ed,redus\,2} = 285 - 100 \cdot 0{,}45 = 240\ kN$$

Această ultimă valoare (240 kN) este cea folosită la verificarea $\tau_{Ed} < \tau_{Rd,c}$ sau la dimensionarea etrierilor; etrierii rezultați se dispun, totuși, până la fața reazemului.

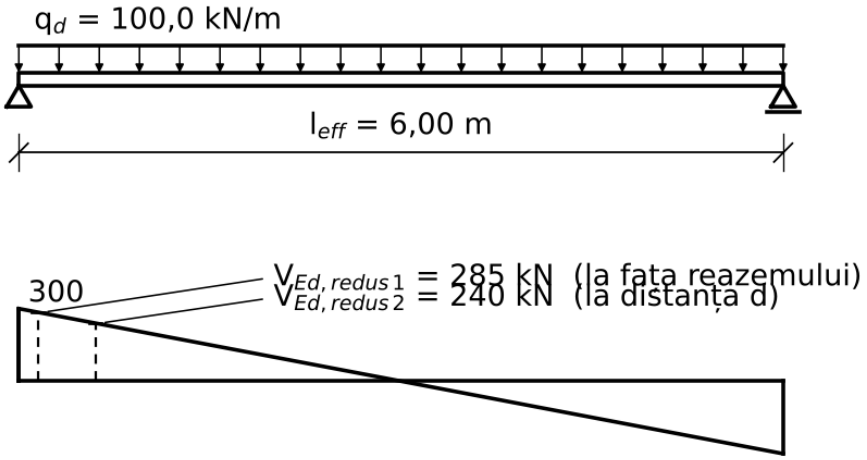


Figura 5.15 — Forța tăietoare redusă la fața reazemului și la distanța d, Exemplul 5.7.1

Exemplul 5.7.2 — Dimensionarea completă a etrierilor

Se reia grinda din Exemplul 4.5.1 (b×h=350×700 mm, C25/30, B500, d=652,5 mm, $A_{s,eff}$=4⌀25=1963 mm², D_{upper}=16 mm), pentru care forța tăietoare de calcul este V_{Ed}=280 kN. Dimensionați etrierii, urmând etapele din secțiunea 5.6.

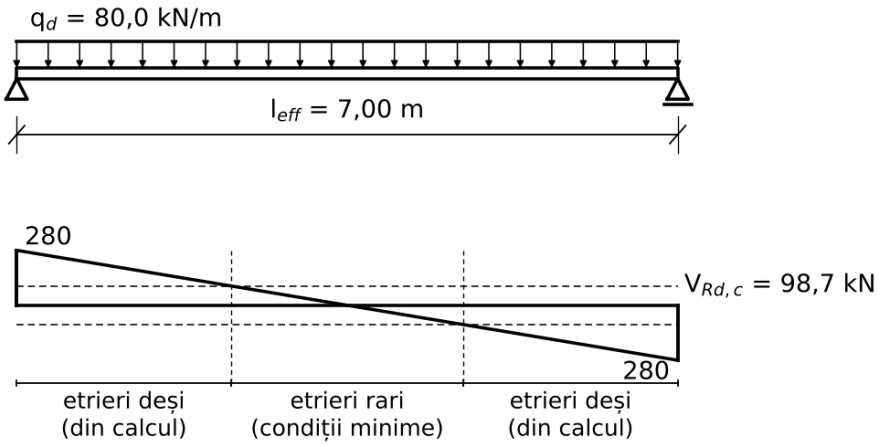


Figura 5.16 — Schema statică, diagrama de forță tăietoare și zonele de etrieri, Exemplul 5.7.2

Etapa 1 — Efortul unitar de forfecare

$$z = 0{,}9\,d = 0{,}9 \cdot 652{,}5 = 587{,}25\,mm$$

$$\tau_{Ed} = \frac{280\,000}{350 \cdot 587{,}25} = 1{,}362\,MPa$$

Etapa 2 — Oțelul pentru etrieri

Se adoptă același oțel ca la armătura longitudinală: B500, cu $f_{ywd}=f_{yd}=434{,}78$ MPa.

Etapa 3 — Este necesară armătură de forfecare calculată?

Cu $\rho_l=A_{sl}/(b_w \cdot d)=1963/(350 \cdot 652{,}5)=0{,}0086$ și $d_{dg}=16+16=32$ mm:

$$\tau_{Rd,c} = \frac{0{,}66}{1{,}4} \cdot \sqrt[3]{100 \cdot 0{,}0086 \cdot 25 \cdot \frac{32}{652{,}5}} = 0{,}480\,MPa$$

$$\tau_{Rdc,min} = \frac{11}{1{,}4} \cdot \sqrt{\frac{25}{434{,}78} \cdot \frac{32}{652{,}5}} = 0{,}417\,MPa$$

$\tau_{Rd,c}$ = max(0,480; 0,417) = 0,480 MPa. Cum $\tau_{Ed}=1{,}362$ MPa $\gg \tau_{Rd,c}=0{,}480$ MPa, este necesară armătură de forfecare calculată (se continuă cu etapele 4-9).

Etapa 4 — Condiții minime

Se începe cu etrieri ϕ8 cu două brațe:

$$A_{sw} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 100{,}5\,mm^2$$

Distanța longitudinală maximă rezultă din cele două condiții:

$$s_{max} \leq 0{,}75 \cdot 652{,}5 = 489\,mm \qquad s_{max} \leq 300\,mm$$

$$s_{max} \leq \frac{100{,}5 \cdot 500}{350 \cdot 1 \cdot 0{,}08 \cdot \sqrt{25}} = 359\,mm$$

Guvernează plafonul practic: $s_{max}=300$ mm. Distanța minimă: $s_{min}\geq 70$ mm.

Etapa 5 — Alegerea unghiului θ

Se începe cu cotθ=2,5 (θ=21,8°), varianta cea mai economică.

Etapa 6 — Verificarea diagonalelor comprimate

$$\sigma_{cd} = \tau_{Ed}(cot\theta + tan\theta) = 1{,}362 \cdot (2{,}5 + 0{,}4) = 3{,}95\,MPa$$

$$\nu \cdot f_{cd} = 0{,}5 \cdot 16{,}667 = 8{,}33\,MPa \qquad 3{,}95\,MPa < 8{,}33\,MPa \checkmark$$

Bielele de beton verifică larg — se poate continua cu dimensionarea etrierilor, păstrând cotθ=2,5.

Etapa 7 — Dimensionarea etrierilor

$$s \leq \frac{A_{sw}\, cot\theta\, f_{ywd}}{b_w \tau_{Ed}} = \frac{100{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 434{,}78}{350 \cdot 1{,}362} = 229\,mm$$

Valoarea 229 mm se încadrează între s_{min}=70 mm și s_{max}=300 mm — diametrul ϕ8 este potrivit. Se adoptă, prin rotunjire în jos, s=225 mm (etrieri ϕ8/225 mm). Coeficientul de armare efectiv:

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{b_w\, s} = \frac{100{,}5}{350 \cdot 225} = 0{,}001277$$

Verificare a armării minime: $\rho_{w,min}$=0,08·√25/500=0,0008 < 0,001277 ✓.

Etapa 8 — Unghiul θ real, cu etrierii aleși

$$cot\theta = \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 16{,}667}{0{,}001277 \cdot 434{,}78} - 1} \approx 3{,}74$$

Valoarea depășește limita superioară admisă, deci se adoptă cotθ=2,5 — confirmă că, pentru această armare, alegerea inițială este cea mai bună posibilă în intervalul permis (betonul are rezervă de capacitate peste ce este strict necesar).

Etapa 9 — Capacitatea portantă finală

$$\tau_{Rd} = \rho_w f_{ywd}\, cot\theta = 0{,}001277 \cdot 434{,}78 \cdot 2{,}5 = 1{,}388\,MPa \geq \tau_{Ed} = 1{,}362\,MPa \checkmark$$

$$\frac{\nu \cdot f_{cd}}{2} = \frac{0{,}5 \cdot 16{,}667}{2} = 4{,}17\ MPa \qquad 1{,}388\ MPa < 4{,}17\ MPa\ \checkmark$$

Etapa 10 — Dispunerea pe lungimea grinzii

Se calculează întâi forța tăietoare capabilă a secțiunii fără etrieri calculați:

$$V_{Rd,c} = \tau_{Rd,c} \cdot b_w \cdot z = 0{,}480 \cdot 350 \cdot 587{,}25 = 98\,658\ N \approx 98{,}7\ kN$$

Pentru o grindă simplu rezemată, încărcată uniform distribuit, diagrama de forță tăietoare este liniară: pornește de la V_{max}=280 kN în dreptul reazemului și se anulează la mijlocul deschiderii, la distanța $l_{eff}/2$=3,50 m. Lungimea x pe care se dispun etrierii calculați („deși") se obține din asemănarea triunghiurilor formate de diagrama de forță tăietoare (Figura 5.7):

$$\frac{x}{\frac{l_{eff}}{2}} = \frac{V_{max} - V_{Rd,c}}{V_{max}}$$

Explicit, triunghiul mare are cateta verticală V_{max} și cateta orizontală $l_{eff}/2$, iar triunghiul mic, asemenea cu el, are cateta verticală (V_{max}–$V_{Rd,c}$) și cateta orizontală x. Rezultă:

$$x = \frac{l_{eff}}{2} \cdot \frac{V_{max} - V_{Rd,c}}{V_{max}} = 3{,}50 \cdot \frac{280 - 98{,}7}{280} = 3{,}50 \cdot 0{,}648 = 2{,}267\ m$$

Se adoptă, prin rotunjire în plus (acoperitor), x=2,30 m de la axul fiecărui reazem. Pe această lungime se dispun etrierii calculați, ϕ8/225 mm (se poate rotunji la 220mm)

Zona centrală, în care V_{Ed} scade sub $V_{Rd,c}$, are lungimea:

$$l_{central} = l_{eff} - 2x = 7{,}00 - 2 \cdot 2{,}30 = 2{,}40\ m$$

Pe această zonă etrierii se dispun la distanța maximă permisă de condițiile minime: s_{max}=300 mm

Soluție finală

Etrieri ϕ8/220 mm (2 brațe) în zonele de reazem, etrieri ϕ8 la distanța maximă din condiții minime în zona centrală. Toate verificările sunt îndeplinite.

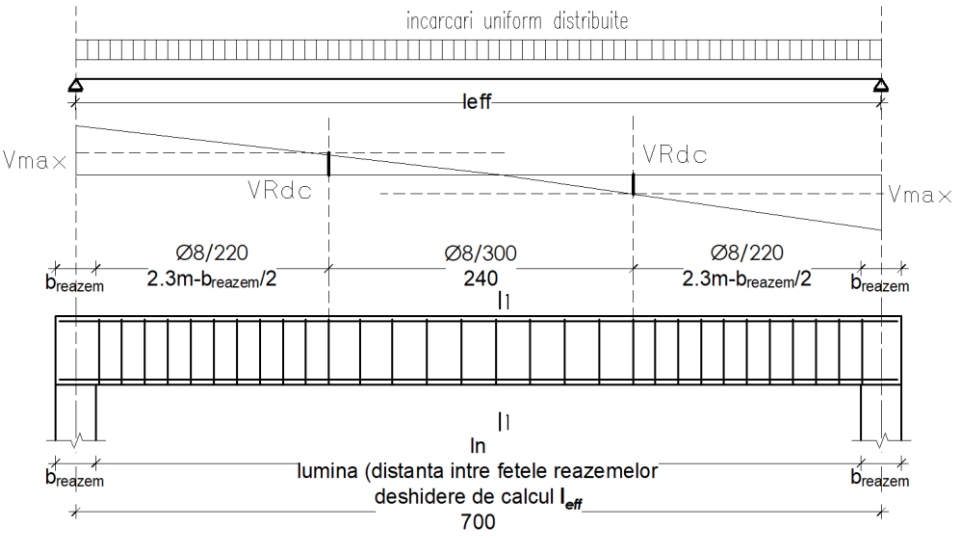


Figura 5.17 — Dispunerea etrierilor pe lungimea grinzii, Exemplul 5.7.2

Exemplul 5.7.3 — Grindă slab solicitată: etrieri numai din condiții minime

Se reia grinda din Exemplul 5.7.2 (b×h = 350×700 mm, beton C25/30, oțel B500, d = 652,5 mm, D_{upper} = 16 mm), armată longitudinal cu 4⌀25, $A_{s,eff}$ = 1963 mm². Armătura longitudinală se consideră cunoscută (dată prin tema de proiectare, pentru uniformizarea armării grinzilor planșeului) — nu se reia calculul la moment încovoietor. Spre deosebire de exemplul precedent, grinda este solicitată de o încărcare uniform distribuită de calcul mult mai mică, qd = 20,0

kN/m, pe deschiderea efectivă l_{eff} = 7,00 m. Să se dimensioneze etrierii, urmând etapele din secțiunea 5.6.

Observație. Armătura longitudinală este mai mare decât ar cere această încărcare; ea nu se reduce, fiind impusă prin temă. Cantitatea ei intervine totuși în calculul la forță tăietoare, prin coeficientul de armare longitudinală ρ_l, care mărește efortul capabil al betonului.

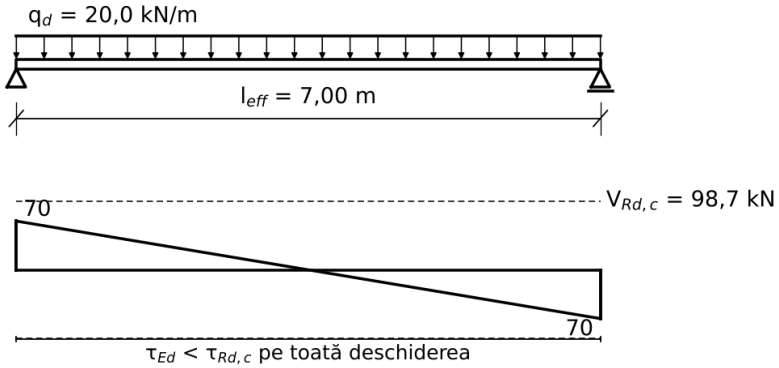


Figura 5.18 — Schema statică și diagrama de forță tăietoare pentru Exemplul 5.7.3

Etapa 1 — Forța tăietoare de proiectare și efortul unitar de forfecare

$$V_{Ed} = \frac{q_d \, l_{eff}}{2} = \frac{20{,}0 \cdot 7{,}00}{2} = 70{,}0 \; kN$$

$$z = 0{,}9 \, d = 0{,}9 \cdot 652{,}5 = 587{,}25 \; mm$$

$$\tau_{Ed} = \frac{V_{Ed}}{b_w \cdot z} = \frac{70\,000}{350 \cdot 587{,}25} = 0{,}341 \; MPa$$

Se lucrează acoperitor cu valoarea maximă din diagramă, fără a aplica reducerea de lângă reazem (secțiunea 5.5).

Etapa 2 — Oțelul pentru etrieri

Se adoptă același oțel ca la armătura longitudinală: B500, cu $f_{ywd} = f_{yd}$ = 434,78 MPa.

Etapa 3 — Este necesară armătură de forfecare calculată?

$$\rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w\, d} = \frac{1963}{350 \cdot 652{,}5} = 0{,}0086$$

$$d_{dg} = 16 + D_{lower} = 16 + 16 = 32\, mm$$

$$\tau_{Rd,c} = \frac{0{,}66}{\gamma_V} \cdot \sqrt[3]{100 \cdot 0{,}0086 \cdot 25 \cdot \frac{32}{652{,}5}} = 0{,}480\, MPa$$

$$\tau_{Rdc,min} = \frac{11}{\gamma_V} \cdot \sqrt{\frac{25}{434{,}78} \cdot \frac{32}{652{,}5}} = 0{,}417\, MPa$$

$$\tau_{Rd,c} = max(0{,}480\,;\, 0{,}417) = 0{,}480\, MPa$$

Comparația cu efortul de proiectare: **τ_{Ed} = 0,341 MPa < $\tau_{Rd,c}$ = 0,480 MPa** — secțiunea de beton, împreună cu armătura longitudinală, preia singură forța tăietoare. Nu este necesară armătură de forfecare calculată: etrierii rezultă numai din condiții minime (etapa 4), iar etapele 5-9 nu se mai parcurg.

$$V_{Rd,c} = \tau_{Rd,c} \cdot b_w \cdot z = 0{,}480 \cdot 350 \cdot 587{,}25 = 98\,658\, N \approx 98{,}7\, kN$$

Etapa 4 — Condiții minime pentru etrieri

Se aleg etrieri ϕ8 cu două brațe, verticali (α = 90°, sinα = 1):

$$A_{sw} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 100{,}5\, mm^2$$

$$s_{max} \le 0{,}75\, d = 0{,}75 \cdot 652{,}5 = 489\, mm \quad s_{max} \le 300\, mm$$

$$s_{max} \le \frac{A_{sw} f_{yk}}{b_w\, sin\alpha \cdot 0{,}08\sqrt{f_{ck}}} = \frac{100{,}5 \cdot 500}{350 \cdot 1 \cdot 0{,}08 \cdot 5} = 359\, mm$$

Guvernează plafonul practic: s_{max} = 300 mm. Distanța minimă: $s_{min} \ge 50 + 20 = 70$ mm. Se adoptă s = 300 mm.

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{b_w\, s} = \frac{100{,}5}{350 \cdot 300} = 0{,}000957 \geq \rho_{w,min} = \frac{0{,}08\sqrt{25}}{500} = 0{,}000800 \;\checkmark$$

$$s_t = 350 - 2 \cdot 25 - 8 = 292\,mm \leq s_{t,max} = min(0{,}75 \cdot 652{,}5\,;\, 600) = 489\,mm \;\checkmark$$

Etapa 10 — Dispunerea etrierilor pe lungimea grinzii

Valoarea τ_{Ed} = 0,341 MPa a fost calculată cu forța tăietoare maximă din diagramă; în orice altă secțiune a grinzii forța tăietoare este mai mică, deci condiția $\tau_{Ed} < \tau_{Rd,c}$ este îndeplinită pe toată deschiderea. Nu există nicio zonă în care să fie necesari etrieri calculați și nu se mai face împărțirea în zone cu etrieri „deși" și „rari": etrierii rezultați din condiții minime se dispun la pas constant, de la un reazem la celălalt.

Soluție finală

Etrieri ϕ8/300 mm, cu două brațe, dispuși constant pe toată deschiderea grinzii. Forța tăietoare de proiectare este preluată integral de secțiunea de beton împreună cu armătura longitudinală, iar toate condițiile minime de armare transversală sunt îndeplinite.

Comentariu — comparație cu Exemplul 5.7.2

Cele două exemple folosesc exact aceeași grindă și diferă numai prin încărcare:

- qd = 80,0 kN/m → τ_{Ed} = 1,362 MPa > $\tau_{Rd,c}$ = 0,480 MPa → etrieri dimensionați prin calcul, ϕ8/220 mm în zonele de reazem și etrieri rari în zona centrală;
- qd = 20,0 kN/m → τ_{Ed} = 0,341 MPa < $\tau_{Rd,c}$ = 0,480 MPa → etrieri numai din condiții minime, ϕ8/300 mm pe toată deschiderea.

Trecerea de la o situație la cealaltă se produce atunci când τ_{Ed} atinge valoarea $\tau_{Rd,c}$ = 0,480 MPa, căreia îi corespunde încărcarea:

$$q_{d,lim} = \frac{2\,\tau_{Rd,c}\,b_w\,z}{l_{eff}} = \frac{2\,\cdot\,0{,}480\,\cdot\,350\,\cdot\,587{,}25}{7{,}00\,\cdot\,10^3} = 28{,}2\ kN/m$$

Sub această valoare a încărcării etrierii rezultă integral din condiții constructive; peste ea, ei trebuie dimensionați prin calcul.

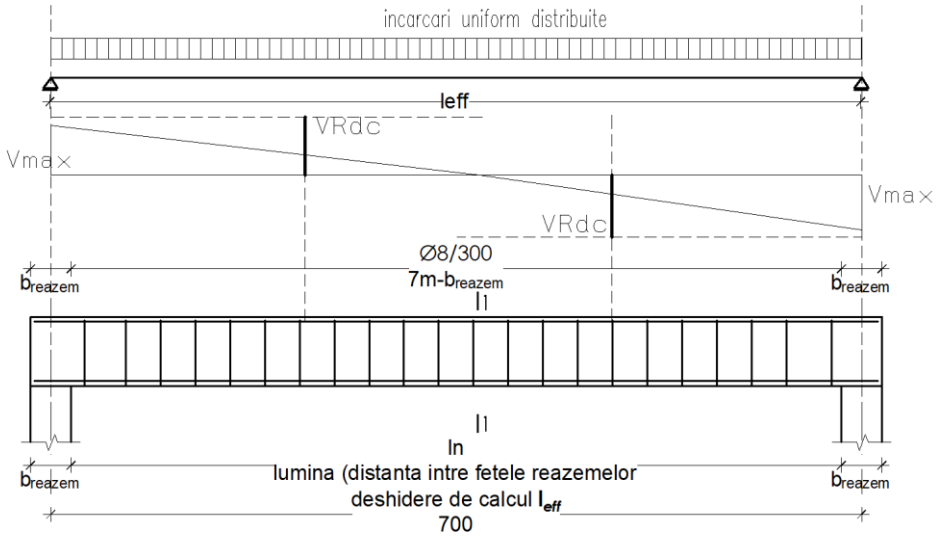


Figura 5.19 — Detaliu de armare transversală, Exemplul 5.7.3

Exemplul 5.7.4 — Consola de la Exemplul 4.5.3, la forță tăietoare

Se reia consola dimensionată la încovoiere în Exemplul 4.5.3: L = 3,20 m, b×h = 300×600 mm, d = 552,5 mm, beton C25/30, oțel B500, D_{upper} = 16 mm, armată la partea superioară cu 4⌀25 ($A_{s,eff}$ = 1963 mm²). Încărcările sunt cele din exemplul respectiv: qd = 50,0 kN/m, F1 = 20 kN la capătul liber și F2 = 30 kN la 1,60 m de încastrare. Să se dimensioneze etrierii.

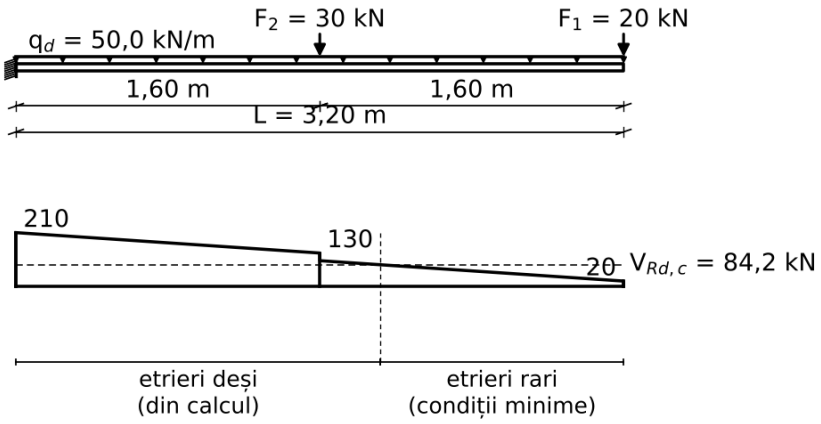


Figura 5.20 — Schema statică și diagrama de forță tăietoare pentru Exemplul 5.7.4

Etapa 1 — Forța tăietoare de proiectare și efortul unitar de forfecare

La consolă forța tăietoare este maximă în secțiunea de încastrare, unde se cumulează toată încărcarea:

$$V_{Ed} = q_d\, L + F_1 + F_2 = 50{,}0 \cdot 3{,}20 + 20 + 30 = 210\,kN$$

$$z = 0{,}9\, d = 0{,}9 \cdot 552{,}5 = 497{,}25\,mm$$

$$\tau_{Ed} = \frac{210\,000}{300 \cdot 497{,}25} = 1{,}408\,MPa$$

Etapa 2 — Oțelul pentru etrieri

Se adoptă B500, cu $f_{ywd} = f_{yd} = 434{,}78$ MPa.

Etapa 3 — Este necesară armătură de forfecare calculată?

Armătura întinsă este cea de la partea superioară, deci ρ_l se calculează cu aria acesteia:

$$\rho_l = \frac{1963}{300 \cdot 552{,}5} = 0{,}01185 \qquad d_{dg} = 32\,mm$$

$$\tau_{Rd,c} = \frac{0{,}66}{1{,}4} \cdot \sqrt[3]{100 \cdot 0{,}01185 \cdot 25 \cdot \frac{32}{552{,}5}} = 0{,}564\, MPa$$

$$\tau_{Rdc,min} = \frac{11}{1{,}4} \cdot \sqrt{\frac{25}{434{,}78} \cdot \frac{32}{552{,}5}} = 0{,}453\, MPa$$

$\tau_{Rd,c}$ = max(0,564 ; 0,453) = 0,564 MPa. Cum τ_{Ed} = 1,408 MPa > 0,564 MPa, este necesară armătură de forfecare calculată.

Etapa 4 — Condiții minime pentru etrieri

Etrieri ϕ8 cu două brațe, A_{sw} = 100,5 mm²:

$$s_{max} \leq 0{,}75 \cdot 552{,}5 = 414\, mm \quad s_{max} \leq \frac{100{,}5 \cdot 500}{300 \cdot 0{,}08 \cdot 5} = 419\, mm \quad s_{max} \leq 300\, mm$$

Guvernează plafonul practic: s_{max} = 300 mm; s_{min} ≥ 70 mm. Distanța transversală: st = 300 − 2·25 − 8 = 242 mm ≤ min(0,75d ; 600) = 414 mm ✓.

Etapa 5 — Alegerea unghiului θ

Se începe cu cotθ = 2,5 (θ = 21,8°).

Etapa 6 — Verificarea diagonalelor comprimate

$$\sigma_{cd} = \tau_{Ed}(cot\theta + tan\theta) = 1{,}408 \cdot 2{,}9 = 4{,}08\, MPa \leq \nu\, f_{cd} = 8{,}33\, MPa \ \checkmark$$

Etapa 7 — Dimensionarea etrierilor

$$s \leq \frac{A_{sw}\, cot\theta\, f_{ywd}}{b_w \tau_{Ed}} = \frac{100{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 434{,}78}{300 \cdot 1{,}408} = 259\, mm$$

Valoarea se încadrează între s_{min} = 70 mm și s_{max} = 300 mm. Se adoptă s = 250 mm (etrieri ϕ8/250 mm):

$$\rho_w = \frac{100{,}5}{300 \cdot 250} = 0{,}001340 \geq \rho_{w,min} = 0{,}000800 \ \checkmark$$

Etapa 8 — Unghiul θ real, cu etrierii aleși

$$cot\theta = \sqrt{\frac{\nu\, f_{cd}}{\rho_w f_{ywd}} - 1} = \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 16{,}667}{0{,}001340 \cdot 434{,}78} - 1} \approx 3{,}65$$

Valoarea depășește limita superioară, deci se adoptă cotθ = 2,5.

Etapa 9 — Capacitatea portantă finală

$$\tau_{Rd} = \rho_w f_{ywd}\, cot\theta = 0{,}001340 \cdot 434{,}78 \cdot 2{,}5 = 1{,}457\, MPa \geq \tau_{Ed} = 1{,}408\, MPa \;\checkmark$$

$$\frac{\nu\, f_{cd}}{2} = 4{,}17\, MPa > 1{,}457\, MPa \;\checkmark$$

Etapa 10 — Dispunerea etrierilor pe lungimea consolei

$$V_{Rd,c} = \tau_{Rd,c}\, b_w\, z = 0{,}564 \cdot 300 \cdot 497{,}25 = 84\,180\, N \approx 84{,}2\, kN$$

Spre deosebire de grinda simplu rezemată, diagrama de forță tăietoare a consolei nu este un triunghi care pornește din zero: la capătul liber ea are deja valoarea F1 = 20 kN, iar la 1,60 m de încastrare are un salt de 30 kN. Lungimea zonei cu etrieri calculați nu se mai obține prin asemănarea triunghiurilor, ci se citește direct din diagramă. Notând cu s distanța măsurată de la capătul liber, pe porțiunea dinaintea forței F2:

$$V(s) = q_d\, s + F_1 = 84{,}2 \rightarrow s = \frac{84{,}2 - 20}{50{,}0} = 1{,}28\, m$$

Forța tăietoare coboară sub $V_{Rd,c}$ la 1,28 m de capătul liber, deci zona cu etrieri calculați se întinde pe 3,20 − 1,28 = 1,92 m de la încastrare; se adoptă, acoperitor, 2,00 m. Pe restul consolei etrierii se dispun din condiții minime, la s_{max} = 300 mm.

Soluție finală

Etrieri ϕ8/250 mm pe primii 2,00 m de la încastrare și etrieri ϕ8/300 mm pe restul consolei. Toate verificările sunt îndeplinite. Ciocurile etrierilor se

poziționează, la consolă, în zona comprimată — adică la partea inferioară a secțiunii (secțiunea 5.4).

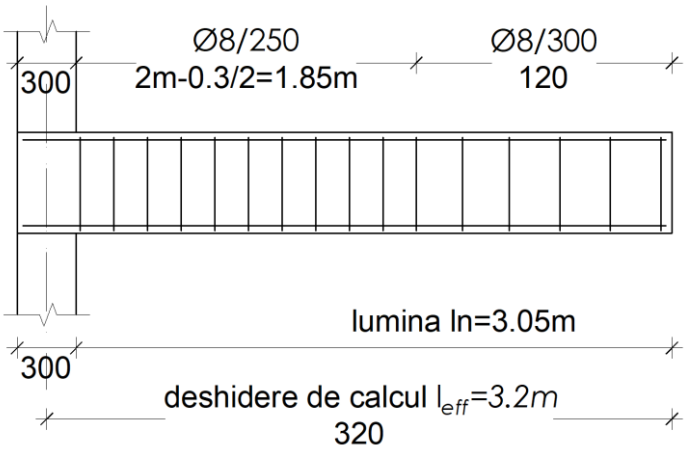


Figura 5.21 — Detaliu de armare, Exemplul 5.7.4

EXEMPLE COMPLETE DE PROIECTARE

Exemple complete de calcul — moment încovoietor și forță tăietoare

Cele două exemple tratează aceeași grindă, solicitată de aceeași încărcare, dar cu secțiuni predimensionate diferit. Fiecare exemplu parcurge întâi dimensionarea la moment încovoietor, apoi verificarea și dimensionarea la forță tăietoare.

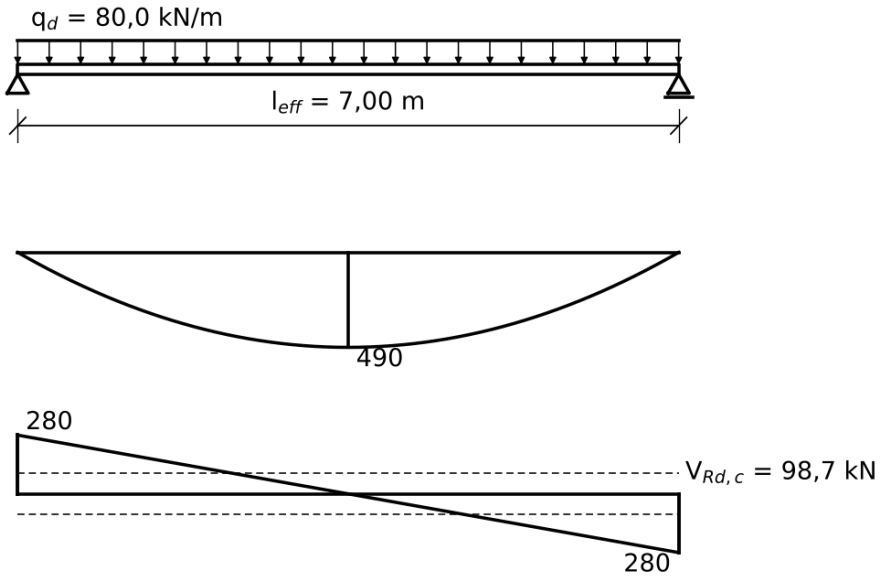


Figura 6.1 — Schema statică, diagrama de momente și diagrama de forță tăietoare, Exemplele 1 și 2

Exemplu 1

Se consideră o grindă din beton armat, simplu rezemată, cu deschiderea efectivă l_{eff}=7,00 m, solicitată la încovoiere de o încărcare uniform distribuită de calcul qd=80,0 kN/m. Grinda este realizată din beton de clasă C25/30 și este armată cu oțel de tip B500. Dimensiunea maximă a agregatului este de 16 mm. Elementul se află într-un mediu corespunzător clasei de expunere XC1, iar clasa structurală este S4.

Se cere dimensionarea armăturii longitudinale inferioare la încovoiere, în ipoteza de armare simplă, pentru o secțiune dreptunghiulară, conform prevederilor SR EN 1992-1-1:2024, respectând pașii de calcul, relațiile teoretice, valorile din tabelele normative și condițiile privind armarea minimă și maximă. Se va verifica, de asemenea, condiția de rezistență a secțiunii prin compararea momentului capabil M_{Rd} cu momentul de proiectare M_{Ed}. În continuare se verifică și se dimensionează armătura transversală la forță tăietoare.

Date de intrare

Grindă din beton armat, simplu rezemată.

$$l_{eff} = 7{,}00\ m \qquad q_d = 80{,}0\ kN/m \qquad D_{upper} = 16\ mm$$

Clasa de expunere: XC1. Clasa structurală: S4.

Momentul de proiectare M_{Ed}

$$M_{Ed} = \frac{q_d l^2 eff}{8} = \frac{80 \cdot 7^2}{8} = 490\ kNm$$

1. Alegerea materialelor și rezistențele de calcul

Alegerea coeficienților de siguranță (Tabelul 4.3, SR EN 1992-1-1:2024):

$$\gamma_c = 1{,}50 \qquad \gamma_s = 1{,}15$$

BETON — C25/30 (din tabel, pentru clasa de expunere XC1):

$$f_{ck} = 25\ MPa \qquad f_{ctm} = 2{,}6\ MPa$$

$$f_{cd} = \eta_{cc} \cdot k_{tc} \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 1{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot \frac{25}{1{,}50} = 16{,}667\ MPa$$

OȚEL — B500 (din condiții de ductilitate, dacă nu se impune altfel în tema de proiectare):

$$f_{yk} = 500\ MPa \qquad \mu_{lim} = 0{,}372$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{500}{1{,}15} = 434{,}78\ MPa$$

2. Acoperirea cu beton a armăturii

Determinarea acoperirii minime c_{min}:

$$c_{min} = max\{c_{min,dur}\ ;\ c_{min,b}\ ;\ 10\ mm\}$$

Durabilitate: din tabel, pentru clasa structurală S4 și clasa de expunere XC1, $c_{min,dur}$=15 mm.

Condiții de aderență și execuție, pentru armătură individuală:

$$c_{min,b,sl} = \varphi_{sl,est} = 25\ mm \qquad c_{min,b,sw} = \varphi_{sw,est} = 10\ mm$$

Verificare agregate: D_{upper}=16 mm < 32 mm, deci nu este necesară majorarea cu 5 mm.

$$c_{min,sl} = max\{15\ ;\ 25\ ;\ 10\} = 25\ mm$$

$$c_{min,sw} = max\{15\ ;\ 10\ ;\ 10\} = 15\ mm$$

Determinarea acoperirii nominale a etrierilor:

$$c_{nom,sw} = c_{min,sw} + \Delta c_{dev} = 15 + 10 = 25\ mm$$

Verificare condiție constructivă: 25 mm este multiplu de 5 mm ⇒ OK.

Determinarea acoperirii nominale a armăturii longitudinale:

$$c_{nom,sl} = c_{min,sl} + \Delta c_{dev} = 25 + 10 = 35\ mm$$

Verificare condiție constructivă: $c_{nom,sl} - c_{nom,sw} = \phi_{sw,est}$ ⇒ 35 − 25 = 10 mm ⇒ OK.

Calculul distanței d1 până la centrul de greutate al armăturii longitudinale (se estimează un rând de armătură):

$$d_1 = c_{nom,sl} + \frac{\varphi_{sl}}{2} = 35 + \frac{25}{2} = 47{,}5\ mm$$

3. Predimensionarea secțiunii

Predimensionarea se face unitar, aplicând condiția de săgeată și condiția de rezistență; secțiunea finală trebuie să satisfacă ambele condiții.

Condiția de săgeată (rigiditate), pentru grinzi simplu rezemate: $l_{eff}/d = 12...18$; se adoptă o valoare medie $l_{eff}/d = 15$:

$$d_{săg} = \frac{l_{eff}}{15} = \frac{7000}{15} = 467\ mm$$

Condiția de armare simplă (armătură de rezistență doar în partea întinsă). Pentru verificarea condiției de rezistență se adoptă lățimea minimă b=250 mm:

$$d_{rez} \geq \sqrt{\frac{M_{Ed}}{\mu_{lim} \cdot b \cdot f_{cd}}} = \sqrt{\frac{490 \cdot 10^6}{0{,}372 \cdot 250 \cdot 16{,}667}} = 562\ mm$$

Alegerea înălțimii utile: d = max(dsăg; drez) = 562 mm. Înălțimea totală:

$$h = d + d_1 = 562 + 47{,}5 = 609{,}5\ mm$$

Se adoptă o valoare mai mare, multiplu de 50 mm: h = 700 mm (observație: se putea alege și valoarea 650 mm — vezi Exemplul 2). Se recalculează d în funcție de h ales:

$$d = h - d_1 = 700 - 47{,}5 = 652{,}5\ mm$$

Lățimea secțiunii b, din condiția constructivă $2 \leq h/b \leq 3$:

$$b \leq \frac{700}{2} = 350\ mm \qquad b \geq \frac{700}{3} = 233\ mm$$

Se adoptă o valoare multiplu de 50 mm: b = 350 mm (observație: se puteau alege și valorile 250 mm sau 300 mm — vezi Exemplul 2).

$$Secțiunea\ finală\ predimensionată\text{: } b \times h = 350 \times 700\ mm$$

4. Determinarea momentului redus

$$\mu = \frac{M_{Ed}}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{490 \cdot 10^6}{350 \cdot 652{,}5^2 \cdot 16{,}667} = 0{,}197 \leq \mu_{lim} = 0{,}372$$

Se admite armarea simplă.

5. Determinarea coeficientului mecanic de armare ω

$$\omega = 1 - \sqrt{1 - 2\mu} = 1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0{,}197} = 0{,}222$$

6. Determinarea ariei de armătură necesare $A_{s,nec}$

$$A_{s,nec} = \omega \cdot b \cdot d \cdot \frac{f_{cd}}{f_{yd}} = \frac{0{,}222 \cdot 350 \cdot 652{,}5 \cdot 16{,}667}{434{,}783} = 1945\ mm^2 = 19{,}45\ cm^2$$

7. Alegerea armăturii longitudinale

Se impune $A_{s,eff} \geq A_{s,nec}$. Din tabel se alege:

$$A_{s,eff} = A_{4\varnothing 25} = 19{,}63\ cm^2 = 1963\ mm^2$$

Se verifică: 19,63 cm² > 19,45 cm² ⇒ condiție satisfăcută.

8. Determinarea distanței minime între armăturile longitudinale

$$c_s \geq max\{\varphi\ ;\ D_{upper} + 5\ ;\ 20\} = max\{25\ ;\ 21\ ;\ 20\} = 25\ mm$$

Lățimea disponibilă (armătura pe un rând):

$$b_{util} = 350 - 2 \cdot 35 = 280\ mm$$

$$c_{s,eff} = \frac{280 - 4 \cdot 25}{3} = 60\ mm > 25\ mm \Rightarrow condiție\ satisfăcută$$

9. Determinarea ariei de armătură longitudinală minimă

$$A_c = b \cdot h = 350 \cdot 700 = 245\,000\ mm^2 \qquad f_{ct,eff} = f_{ctm} = 2{,}6\ MPa$$

$$k_h = 0{,}8 - 0{,}6 \cdot min(b - 0{,}3\,;\, h - 0{,}3) = 0{,}8 - 0{,}6 \cdot 0{,}05 = 0{,}770$$

$$A_{s,min} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}770 \cdot 2{,}6 \cdot 245\,000}{500} = 196\,mm^2$$

Verificare: $A_{s,eff}$ = 1963 mm² ≥ $A_{s,min}$ = 196 mm² ⇒ OK.

10. Determinarea ariei de armătură longitudinală maximă

$$A_{s,max} = 0{,}04 \cdot A_c = 0{,}04 \cdot 245\,000 = 9800\,mm^2$$

Verificare: $A_{s,eff}$ = 1963 mm² ≤ 9800 mm² ⇒ OK.

11. Calculul momentului capabil M_{Rd} — armare simplă

Recalcularea valorilor reale: d1 = 35 + 25/2 = 47,5 mm; d = 700 − 47,5 = 652,5 mm.

Echilibrul de forțe:

$$0{,}8 \cdot x_{real} \cdot f_{cd} \cdot b = A_{s,eff} \cdot f_{yd}$$

$$x_{real} = \frac{1963 \cdot 434{,}783}{0{,}8 \cdot 16{,}667 \cdot 350} = 183{,}0\,mm$$

Brațul de pârghie:

$$z_{real} = d - 0{,}4 \cdot x_{real} = 652{,}5 - 0{,}4 \cdot 183{,}0 = 579{,}3\,mm$$

Momentul capabil:

$$M_{Rd} = A_{s,eff} \cdot f_{yd} \cdot z_{real} = 1963 \cdot 434{,}783 \cdot 579{,}3 = 494\,kNm$$

Verificare finală

M_{Rd} ≥ M_{Ed} ⇒ 494 kNm ≥ 490 kNm ⇒ SECȚIUNE VERIFICATĂ — ARMARE CORECTĂ.

Continuare — verificarea și dimensionarea la forță tăietoare

Se păstrează toate datele stabilite mai sus: b×h = 350×700 mm, d = 652,5 mm, $A_{s,eff}$ = 4⌀25 = 1963 mm², C25/30, B500, D_{upper} = 16 mm.

1. Forța tăietoare de proiectare și efortul unitar de forfecare

$$V_{Ed} = \frac{q_d l_{eff}}{2} = \frac{80 \cdot 7}{2} = 280\,kN$$

$$z = 0{,}9\,d = 0{,}9 \cdot 652{,}5 = 587{,}25\,mm$$

$$\tau_{Ed} = \frac{V_{Ed}}{b_w \cdot z} = \frac{280\,000}{350 \cdot 587{,}25} = 1{,}362\,MPa$$

2. Alegerea oțelului pentru etrieri

Se adoptă același oțel ca la armătura longitudinală: B500, cu $f_{ywd} = f_{yd}$ = 434,78 MPa.

3. Verificarea necesității armăturii de forfecare

$$\rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w\,d} = \frac{1963}{350 \cdot 652{,}5} = 0{,}0086$$

$$d_{dg} = 16 + D_{lower} = 16 + 16 = 32\,mm$$

$$\tau_{Rd,c} = \frac{0{,}66}{\gamma_V} \cdot \sqrt[3]{100 \cdot 0{,}0086 \cdot 25 \cdot \frac{32}{652{,}5}} = 0{,}480\,MPa$$

$$\tau_{Rdc,min} = \frac{11}{1{,}4} \cdot \sqrt{\frac{25}{434{,}78} \cdot \frac{32}{652{,}5}} = 0{,}417\,MPa$$

$\tau_{Rd,c}$ = max(0,480; 0,417) = 0,480 MPa. Cum τ_{Ed} = 1,362 MPa > $\tau_{Rd,c}$ = 0,480 MPa, este necesară armătură de forfecare calculată.

4. Condiții minime pentru etrieri

Se aleg etrieri ϕ8 cu două brațe:

$$A_{sw} = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 8^2}{4} = 100{,}5\,mm^2$$

$$s_{max} \leq 0{,}75\, d = 0{,}75 \cdot 652{,}5 = 489\, mm \quad s_{max} \leq 300\, mm$$

$$s_{max} \leq \frac{A_{sw} f_{yk}}{b_w \cdot 0{,}08 \sqrt{f_{ck}}} = \frac{100{,}5 \cdot 500}{350 \cdot 0{,}08 \cdot 5} = 359\, mm$$

$$s_{min} \geq 50 + 20 = 70\, mm$$

Guvernează plafonul practic: s_{max} = 300 mm.

5. Alegerea unghiului θ

Se începe cu cotθ = 2,5 (θ = 21,8°), varianta cea mai economică.

6. Verificarea diagonalelor comprimate de beton

$$\sigma_{cd} = \tau_{Ed}(cot\theta + tan\theta) = 1{,}362 \cdot (2{,}5 + 0{,}4) = 3{,}95\, MPa$$

$$\nu \cdot f_{cd} = 0{,}5 \cdot 16{,}667 = 8{,}33\, MPa \Rightarrow 3{,}95 < 8{,}33$$
$$\Rightarrow condiţie\ satisfăcută$$

7. Dimensionarea etrierilor

$$s \leq \frac{A_{sw}\, cot\theta\, f_{ywd}}{b_w \tau_{Ed}} = \frac{100{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 434{,}783}{350 \cdot 1{,}362} = 229\, mm$$

Valoarea 229 mm se încadrează între s_{min} = 70 mm și s_{max} = 300 mm ⇒ diametrul ϕ8 este potrivit. Se adoptă s = 220 mm (etrieri ϕ8/220 mm).

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{b_w\, s} = \frac{100{,}5}{350 \cdot 220} = 0{,}001306$$

$$\rho_{w,min} = 0{,}08 \cdot \frac{\sqrt{25}}{500} = 0{,}0008 < 0{,}001306 \Rightarrow OK$$

8. Recalcularea unghiului θ real

$$cot\theta = \sqrt{\frac{\nu\, f_{cd}}{\rho_w f_{ywd}} - 1} = \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 16{,}667}{0{,}001306 \cdot 434{,}783} - 1} = 3{,}70$$

Valoarea depășește limita superioară admisă (2,5), deci se păstrează cotθ = 2,5.

9. Capacitatea portantă finală la forță tăietoare

$$\tau_{Rd} = \rho_w f_{ywd}\, cot\theta = 0{,}001306 \cdot 434{,}783 \cdot 2{,}5 = 1{,}419\, MPa \geq \tau_{Ed} = 1{,}362\, MPa \Rightarrow OK$$

$$\frac{\nu\, f_{cd}}{2} = 4{,}17\, MPa \Rightarrow 1{,}419 < 4{,}17 \Rightarrow OK$$

10. Dispunerea etrierilor pe lungimea grinzii

$$V_{Rd,c} = \tau_{Rd,c} b_w\, z = 0{,}480 \cdot 350 \cdot 587{,}25 = 98{,}7\, kN$$

Din asemănarea triunghiurilor diagramei de forță tăietoare (liniară, de la 280 kN la reazem la zero la mijlocul deschiderii):

$$x = \frac{l_{eff}}{2} \cdot \frac{V_{max} - V_{Rd,c}}{V_{max}} = 3{,}50 \cdot \frac{280 - 98{,}7}{280} = 2{,}267\, m \rightarrow se\ adopt\text{ă}\ 2{,}30\, m$$

Zona centrală: lcentral = 7,00 − 2 · 2,30 = 2,40 m, unde se dispun etrieri la distanța maximă din condiții minime (se adoptă ϕ8/300 mm).

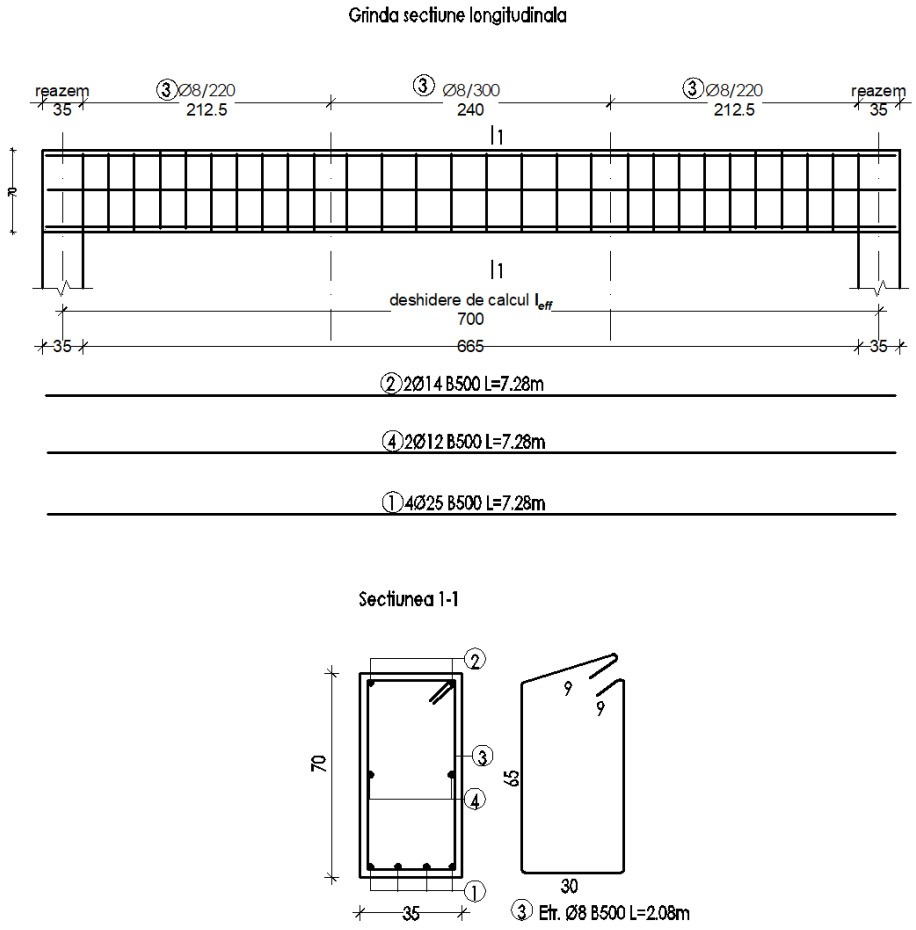


Figura 6.2 — Plan de armare, Exemplu 1

Exemplu 2

Se consideră grinda de la exemplul precedent, însă cu o secțiune aleasă mai mică. Restul datelor de intrare rămân neschimbate. Se reia calculul de la punctul 3 — Predimensionarea secțiunii.

3. Predimensionarea secțiunii

Condiția de săgeată (rigiditate), pentru grinzi simplu rezemate: $l_{eff}/d = 12...18$; se adoptă $l_{eff}/d = 15$:

$$d_{săg} = \frac{7000}{15} = 467\,mm$$

Condiția de armare simplă, cu lățimea minimă b = 250 mm:

$$d_{rez} \geq \sqrt{\frac{490 \cdot 10^6}{0{,}372 \cdot 250 \cdot 16{,}667}} = 562\,mm$$

Alegerea înălțimii utile: d = max(dsăg; drez) = 562 mm. Înălțimea totală:

$$h = 562 + 47{,}5 = 609{,}5\,mm \rightarrow se\ adoptă\ h = 650\,mm$$

$$d = h - d_1 = 650 - 47{,}5 = 602{,}5\,mm$$

Lățimea secțiunii b, din condiția constructivă $2 \leq h/b \leq 3$:

$$b \leq \frac{650}{2} = 325\,mm \qquad b \geq \frac{650}{3} = 217\,mm$$

Se adoptă o valoare multiplu de 50 mm: b = 250 mm.

$$Secțiunea\ finală\ predimensionată\text{: } b \times h = 250 \times 650\,mm$$

4. Determinarea momentului redus

$$\mu = \frac{490 \cdot 10^6}{250 \cdot 602{,}5^2 \cdot 16{,}667} = 0{,}324 \leq \mu_{lim} = 0{,}372$$

Se admite armarea simplă (la limită).

5. Determinarea coeficientului mecanic de armare ω

$$\omega = 1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0{,}324} = 0{,}407$$

6. Determinarea ariei de armătură necesare $A_{s,nec}$

$$A_{s,nec} = \frac{0{,}407 \cdot 250 \cdot 602{,}5 \cdot 16{,}667}{434{,}783} = 2350\,mm^2 = 23{,}50\,cm^2$$

7. Alegerea armăturii longitudinale

$$A_{s,eff} = A_{5\varnothing 25} = 24{,}54\ cm^2 = 2454\ mm^2$$

Se verifică: 24,54 cm² > 23,50 cm² ⇒ condiție satisfăcută.

8. Determinarea distanței minime între armăturile longitudinale

$$c_s \geq max\{25\ ;\ 21\ ;\ 20\} = 25\ mm$$

$$b_{util} = 250 - 2 \cdot 35 = 180\ mm$$

Verificare cu cele 5 bare pe un singur rând (4 goluri):

$$c_{s,eff} = \frac{180 - 5 \cdot 25}{4} = 13{,}7\ mm < 25\ mm$$
$$\Rightarrow condiție\ nesatisfăcută$$

Se dispune armătura pe 2 rânduri: 3 bare pe primul rând și 2 bare pe al doilea. Se verifică rândul cel mai aglomerat (3 bare, 2 goluri):

$$c_{s,eff} = \frac{180 - 3 \cdot 25}{2} = 52{,}5\ mm > 25\ mm \Rightarrow condiție\ satisfăcută$$

Distanța între rânduri se adoptă cs = 25 mm.

9. Determinarea ariei de armătură longitudinală minimă

$$A_c = 250 \cdot 650 = 162\,500\ mm^2$$

min(b−0,3; h−0,3) = min(−0,05; 0,35): expresia conduce la o valoare negativă pentru b, deci se adoptă 0:

$$k_h = 0{,}8 - 0{,}6 \cdot 0 = 0{,}8$$

$$A_{s,min} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 2{,}6 \cdot 162\,500}{500} = 135\ mm^2$$

Verificare: $A_{s,eff}$ = 2454 mm² ≥ 135 mm² ⇒ OK.

10. Determinarea ariei de armătură longitudinală maximă

$$A_{s,max} = 0{,}04 \cdot 162\,500 = 6500\ mm^2$$

Verificare: $A_{s,eff}$ = 2454 mm² ≤ 6500 mm² ⇒ OK.

11. Calculul momentului capabil M_{Rd} — armare simplă

Recalcularea valorilor reale (armătura s-a dispus pe 2 rânduri):

$$d_1 = 35 + 25 + \frac{25}{2} = 72{,}5\,mm \qquad d = 650 - 72{,}5 = 577{,}5\,mm$$

$$x_{real} = \frac{2454 \cdot 434{,}783}{0{,}8 \cdot 16{,}667 \cdot 250} = 320{,}08\,mm$$

$$z_{real} = 577{,}5 - 0{,}4 \cdot 320{,}08 = 449{,}47\,mm$$

$$M_{Rd} = 2454 \cdot 434{,}783 \cdot 449{,}47 = 479{,}5\,kNm$$

Verificare — secțiune neverificată

M_{Rd} < M_{Ed} ⇒ 479 kNm < 490 kNm ⇒ SECȚIUNEA NU ESTE VERIFICATĂ. Soluție: pentru a compensa diminuarea brațului de pârghie cauzată de dispunerea armăturilor pe 2 rânduri, se mărește aria de armătură efectivă și se aleg 6 bare, cu 3 bare pe fiecare rând. (Observație: se pot alege și alte variante de armare până când secțiunea verifică.)

$$A_{s,eff} = A_{6\varnothing 25} = 29{,}45\,cm^2 = 2945\,mm^2$$

$$x_{real} = \frac{2945 \cdot 434{,}783}{0{,}8 \cdot 16{,}667 \cdot 250} = 384{,}12\,mm$$

$$z_{real} = 577{,}5 - 0{,}4 \cdot 384{,}12 = 423{,}85\,mm$$

$$M_{Rd} = 2945 \cdot 434{,}783 \cdot 423{,}85 = 542{,}70\,kNm$$

Verificare finală

M_{Rd} ≥ M_{Ed} ⇒ 542 kNm > 490 kNm ⇒ SECȚIUNE VERIFICATĂ — ARMARE CORECTĂ.

verificarea și dimensionarea la forță tăietoare

Se păstrează datele stabilite mai sus: b×h = 250×650 mm, armătură pe 2 rânduri, d = 577,5 mm, $A_{s,eff}$ = 6⌀25 = 2945 mm².

1. Forța tăietoare de proiectare și efortul unitar de forfecare

$$V_{Ed} = \frac{80 \cdot 7}{2} = 280\,kN \qquad z = 0{,}9 \cdot 577{,}5 = 519{,}75\,mm$$

$$\tau_{Ed} = \frac{280\,000}{250 \cdot 519{,}75} = 2{,}155\,MPa$$

Se observă că efortul unitar este semnificativ mai mare decât la Exemplul 1 (2,155 față de 1,362 MPa), din cauza secțiunii mai mici.

2. Alegerea oțelului pentru etrieri

Se adoptă B500, cu f_{ywd} = 434,78 MPa.

3. Verificarea necesității armăturii de forfecare

$$\rho_l = \frac{2945}{250 \cdot 577{,}5} = 0{,}0204 \qquad d_{dg} = 32\,mm$$

$$\tau_{Rd,c} = \frac{0{,}66}{1{,}4} \cdot \sqrt[3]{100 \cdot 0{,}0204 \cdot 25 \cdot \frac{32}{577{,}5}} = 0{,}666\,MPa$$

$$\tau_{Rdc,min} = \frac{11}{1{,}4} \cdot \sqrt{\frac{25}{434{,}78} \cdot \frac{32}{577{,}5}} = 0{,}444\,MPa$$

$\tau_{Rd,c}$ = max(0,666; 0,444) = 0,666 MPa. Cum τ_{Ed} = 2,155 MPa > 0,666 MPa, este necesară armătură de forfecare calculată.

4. Condiții minime pentru etrieri

Se aleg etrieri ϕ8 cu două brațe, A_{sw} = 100,5 mm²:

$$s_{max} \leq 0{,}75 \cdot 577{,}5 = 433\,mm \qquad s_{max} \leq \frac{100{,}5 \cdot 500}{250 \cdot 0{,}08 \cdot 5} = 503\,mm \quad s_{max} \leq 300\,mm$$

Guvernează plafonul practic: s_{max} = 300 mm; s_{min} ≥ 70 mm.

5. Alegerea unghiului θ

Se începe cu cotθ = 2,5.

6. Verificarea diagonalelor comprimate de beton

$$\sigma_{cd} = 2{,}155 \cdot (2{,}5 + 0{,}4) = 6{,}25\,MPa \leq \nu\, f_{cd} = 8{,}33\,MPa$$
$$\Rightarrow \text{condiție satisfăcută}$$

Rezerva este însă mult mai mică decât la Exemplul 1 (6,25 față de 3,95 MPa) — secțiunea redusă solicită bielele de beton aproape de limită.

7. Dimensionarea etrierilor

$$s \leq \frac{100{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 434{,}783}{250 \cdot 2{,}155} = 203\,mm$$

Valoarea se încadrează între s_{min} = 70 mm și s_{max} = 300 mm. Se adoptă s = 200 mm (etrieri ϕ8/200 mm).

$$\rho_w = \frac{100{,}5}{250 \cdot 200} = 0{,}002010 > \rho_{w,min} = 0{,}0008 \Rightarrow OK$$

8. Recalcularea unghiului θ real

$$cot\theta = \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 16{,}667}{0{,}002010 \cdot 434{,}783} - 1} = 2{,}92$$

Valoarea depășește limita superioară admisă (2,5), deci se păstrează cotθ = 2,5.

9. Capacitatea portantă finală la forță tăietoare

$$\tau_{Rd} = 0{,}002010 \cdot 434{,}783 \cdot 2{,}5 = 2{,}185\,MPa \geq \tau_{Ed} = 2{,}155\,MPa$$
$$\Rightarrow OK$$

$$\frac{\nu\, f_{cd}}{2} = 4{,}17\,MPa \Rightarrow 2{,}185 < 4{,}17 \Rightarrow OK$$

10. Dispunerea etrierilor pe lungimea grinzii

$$V_{Rd,c} = 0{,}666 \cdot 250 \cdot 519{,}75 = 86{,}6\ kN$$

$$x = 3{,}50 \cdot \frac{280 - 86{,}6}{280} = 2{,}417\ m$$

$$\rightarrow \quad se\ adoptă\ 2{,}45\ m\ de\ la\ axul\ fiecărui\ reazem$$

Zona centrală: lcentral = 7,00 − 2 · 2,45 = 2,10 m, unde se dispun etrieri la distanța maximă din condiții minime (se adoptă ϕ8/300 mm).

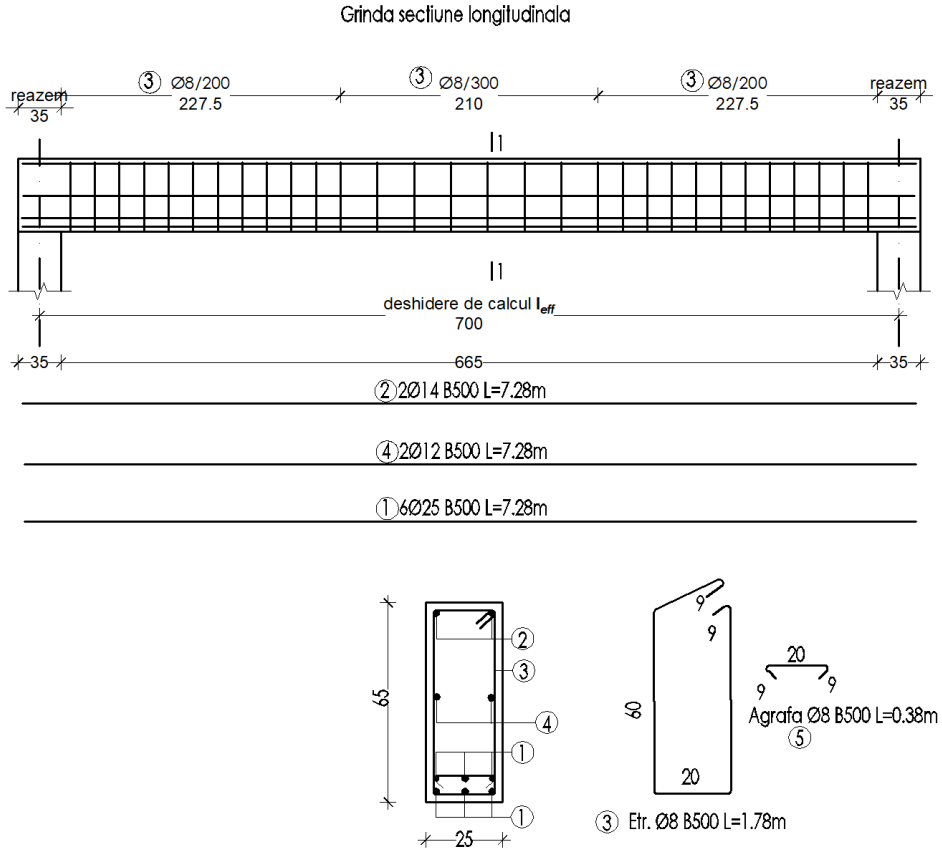


Figura 6.3 — Plan de armare, Exemplu 2

Exemplu 3 — Grindă cu consolă

Se consideră o grindă din beton armat cu o deschidere de l_{eff} = 6,00 m și o consolă de 2,00 m la unul dintre capete. Grinda este solicitată de o încărcare uniform distribuită de calcul qd = 88,0 kN/m, aplicată pe toată lungimea, de o forță concentrată de 52 kN la mijlocul deschiderii și de o forță concentrată de 22 kN la mijlocul consolei. Betonul este de clasă C25/30, armătura de tip B500, clasa de expunere XC1, clasa structurală S4, D_{upper} = 16 mm.

Se cere dimensionarea completă: armătura longitudinală în câmp și pe reazem, apoi etrierii. Secțiunea se păstrează aceeași pe toată lungimea grinzii și rezultă din solicitarea maximă dintre cele două zone.

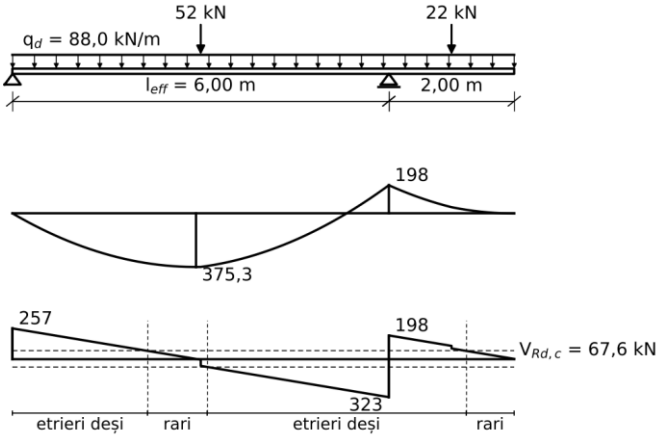


Figura 6.4 — Schema statică, diagrama de momente și diagrama de forță tăietoare, Exemplu 3

Reacțiuni și eforturi

Din ecuația de momente față de reazemul A (lungimea totală 8,00 m):

$$R_B = \frac{88{,}0 \cdot 8{,}00 \cdot 4{,}00 + 52 \cdot 3{,}00 + 22 \cdot 7{,}00}{6{,}00} = \frac{3126}{6{,}00} = 521{,}0\ kN$$

$$R_A = 88{,}0 \cdot 8{,}00 + 52 + 22 - 521{,}0 = 257{,}0\ kN$$

Momentul maxim în câmp apare acolo unde forța tăietoare se anulează:

$$x_0 = \frac{R_A}{q_d} = \frac{257{,}0}{88{,}0} = 2{,}92\ m$$

$$M_{câmp} = 257{,}0 \cdot 2{,}92 - \frac{88{,}0 \cdot 2{,}92^2}{2} = 375{,}3\ kNm$$

Momentul pe reazem se obține din echilibrul consolei (moment negativ — întinde fibra superioară):

$$M_{reazem} = -\left(\frac{88{,}0 \cdot 2{,}00^2}{2} + 22 \cdot 1{,}00\right) = -198{,}0\ kNm$$

Forța tăietoare maximă apare în secțiunea din stânga reazemului B:

$$V_{max} = |257{,}0 - 88{,}0 \cdot 6{,}00 - 52| = 323{,}0\ kN$$

1. Materiale

$\gamma_C = 1{,}50$; $\gamma_S = 1{,}15$. C25/30: $f_{ck} = 25$ MPa, $f_{ctm} = 2{,}6$ MPa, $f_{cd} = 16{,}667$ MPa. B500: $f_{yd} = 434{,}78$ MPa, $\mu_{lim} = 0{,}372$.

2. Acoperirea cu beton

Pentru XC1, clasa structurală S4, cu $\phi_{sl,est} = 25$ mm și $\phi_{sw,est} = 10$ mm: $c_{nom,sl} = 35$ mm, $c_{nom,sw} = 25$ mm, d1 = 47,5 mm.

3. Predimensionarea secțiunii

Secțiunea se stabilește din momentul cel mai mare, cel din câmp (375,3 kNm > 198,0 kNm). Condiția de săgeată, pentru deschiderea de 6,00 m, cu l/d = 15:

$$d_{săgeată} = \frac{6000}{15} = 400\ mm$$

$$d_{rezistență} \geq \sqrt{\frac{375{,}3 \cdot 10^6}{0{,}372 \cdot 300 \cdot 16{,}667}} = 449\ mm$$

$$d = max(400\,;\,449) = 449\ mm \rightarrow h = 449 + 47{,}5 = 496{,}5\ mm$$
$$\rightarrow se\ adoptă\ h = 600\ mm$$

Rotunjirea se face cu rezervă: aceeași secțiune trebuie să acopere și zona de reazem, unde forța tăietoare este mare, iar o înălțime mai mare reduce substanțial cantitatea de etrieri. Rezultă d = 600 − 47,5 = 552,5 mm, iar din condiția 2 ≤ h/b ≤ 3 (200 ≤ b ≤ 300 mm) se adoptă b = 300 mm. Secțiunea: b × h = 300 × 600 mm, constantă pe toată lungimea.

4-6. Armătura în câmp (la partea inferioară)

$$\mu = \frac{375{,}3 \cdot 10^6}{300 \cdot 552{,}5^2 \cdot 16{,}667} = 0{,}246 \leq 0{,}372 \rightarrow armare\ simplă$$

$$\omega = 1 - \sqrt{1 - 2 \cdot 0{,}246} = 0{,}287$$

$$A_{s,nec} = \frac{0{,}287 \cdot 300 \cdot 552{,}5 \cdot 16{,}667}{434{,}78} = 1824\ mm^2$$

$$A_{s,eff} = 4\varnothing 25 = 1963\ mm^2 > 1824\ mm^2\ \checkmark$$

$$b_{util} = 300 - 70 = 230\ mm \quad c_{s,eff} = \frac{230 - 4 \cdot 25}{3} = 43{,}3\ mm > 25\ mm\ \checkmark$$

Armătura pe reazem (la partea superioară)

Pe reazemul B momentul este negativ, deci fibra întinsă este cea superioară. Se calculează cu aceeași secțiune:

$$\mu = \frac{198{,}0 \cdot 10^6}{300 \cdot 552{,}5^2 \cdot 16{,}667} = 0{,}130 \quad \omega = 0{,}139$$

$$A_{s,nec} = \frac{0{,}139 \cdot 300 \cdot 552{,}5 \cdot 16{,}667}{434{,}78} = 886\ mm^2$$

$$A_{s,eff} = 3\varnothing 20 = 942\ mm^2 > 886\ mm^2\ \checkmark \quad c_{s,eff} = \frac{230 - 3 \cdot 20}{2} = 85\ mm\ \checkmark$$

Aceste bare se prelungesc din consolă în deschidere, peste reazem — a se vedea observația privind ancorarea de la Exemplul 4.5.3.

Armare minimă și maximă

$$A_c = 180\,000\,mm^2 \quad k_h = 0{,}80 \quad A_{s,min} = 150\,mm^2 \quad A_{s,max} = 7200\,mm^2$$

Atât 1963 mm² (câmp), cât și 942 mm² (reazem) se încadrează între cele două limite.

Momentele capabile

$$câmp: \quad x = \frac{1963 \cdot 434{,}78}{0{,}8 \cdot 16{,}667 \cdot 300} = 213{,}4\,mm \quad z = 467{,}1\,mm \quad M_{Rd} = 399\,kNm \geq 375{,}3\,kNm \;\checkmark$$

$$reazem: \; x = \frac{942 \cdot 434{,}78}{0{,}8 \cdot 16{,}667 \cdot 300} = 102{,}4\,mm \quad z = 511{,}5\,mm \quad M_{Rd} = 210\,kNm \geq 198{,}0\,kNm \;\checkmark$$

Continuare — verificarea și dimensionarea la forță tăietoare

1. Efortul unitar de forfecare

$$z = 0{,}9 \cdot 552{,}5 = 497{,}25\,mm \quad \tau_{Ed} = \frac{323\,000}{300 \cdot 497{,}25} = 2{,}165\,MPa$$

2. Oțelul pentru etrieri

B500, f_{ywd} = 434,78 MPa.

3. Este necesară armătură de forfecare calculată?

Secțiunea de calcul este cea de lângă reazemul B, unde armătura întinsă este cea superioară (3⌀20):

$$\rho_l = \frac{942}{300 \cdot 552{,}5} = 0{,}00568$$

$$\tau_{Rd,c} = \frac{0{,}66}{1{,}4} \cdot \sqrt[3]{100 \cdot 0{,}00568 \cdot 25 \cdot \frac{32}{552{,}5}} = 0{,}442\,MPa$$

$$\tau_{Rdc,min} = \frac{11}{1{,}4} \cdot \sqrt{\frac{25}{434{,}78} \cdot \frac{32}{552{,}5}} = 0{,}453\ MPa$$

De această dată guvernează pragul minim: $\tau_{Rd,c}$ = max(0,442 ; 0,453) = 0,453 MPa. Cum τ_{Ed} = 2,165 MPa ≫ 0,453 MPa, este necesară armătură de forfecare calculată.

4. Condiții minime

$$A_{sw} = 100{,}5\ mm^2 \quad s_{max} \leq 0{,}75 \cdot 552{,}5 = 414\ mm \quad s_{max} \leq \frac{100{,}5 \cdot 500}{300 \cdot 0{,}08 \cdot 5} = 419\ mm \quad s_{max} \leq 300\ mm$$

Guvernează plafonul practic: s_{max} = 300 mm; s_{min} ≥ 70 mm.

5-6. Unghiul θ și verificarea bielelor

$$cot\theta = 2{,}5 \quad \sigma_{cd} = 2{,}165 \cdot 2{,}9 = 6{,}28\ MPa \leq \nu\, f_{cd} = 8{,}33\ MPa\ \checkmark$$

7. Dimensionarea etrierilor

$$s \leq \frac{100{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 434{,}78}{300 \cdot 2{,}165} = 168\ mm \rightarrow se\ adoptă\ s = 150\ mm\ (\varphi 8/150)$$

$$\rho_w = \frac{100{,}5}{300 \cdot 150} = 0{,}002233 \geq 0{,}000800\ \checkmark$$

8-9. Unghiul real și capacitatea finală

$$cot\theta = \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 16{,}667}{0{,}002233 \cdot 434{,}78} - 1} \approx 2{,}75 \rightarrow se\ adoptă\ cot\theta = 2{,}5$$

$$\tau_{Rd} = 0{,}002233 \cdot 434{,}78 \cdot 2{,}5 = 2{,}428\ MPa \geq 2{,}165\ MPa\ \checkmark \quad \frac{\nu\, f_{cd}}{2} = 4{,}17\ MPa\ \checkmark$$

10. Dispunerea etrierilor pe lungimea grinzii

$$V_{Rd,c} = \tau_{Rd,c}\, b_w\, z = 0{,}453 \cdot 300 \cdot 497{,}25 = 67\,640\, N \approx 67{,}6\, kN$$

Zonele cu etrieri calculați sunt cele în care V_{Ed} depășește $V_{Rd,c}$. Limitele rezultă din intersecția diagramei cu această valoare și se măsoară din axul reazemului A:

de la	până la	etrieri
0	2,15 m	calculați
2,15 m	3,10 m	condiții minime
3,10 m	7,23 m	calculați
7,23 m	8,00 m	condiții minime

Etrierii calculați nu se întrerup în dreptul reazemului B.

Soluție finală

b × h = 300 × 600 mm pe toată lungimea; 4⌀25 la partea inferioară în câmp; 3⌀20 la partea superioară, continue din consolă peste reazem; etrieri ϕ8/150 mm în zonele calculate și ϕ8/300 mm în rest**.** Toate verificările la încovoiere și la forță tăietoare sunt îndeplinite.

Lungimea barelor de pe reazem. Conform art. 12.3.2, armătura trebuie să acopere diagrama de momente pentru care a fost calculată, decalată cu $a_l = z(\cot\theta - \cot\alpha)/2$, pentru a ține seama de efectul forței tăietoare. Lungimea de ancorare se calculează cu efortul unitar real din bară în secțiunea considerată — relația (11.3) conține factorul $(\sigma_{sd}/435)^{3/2}$ — astfel încât, acolo unde momentul se anulează, efortul este nul, iar lungimea de ancorare se reduce la valoarea minimă de 10ϕ.

Etrierii fiind verticali, α = 90° și cotα = 0. În acest exemplu momentul negativ se anulează la 0,67 m de reazem; cu decalarea:

$$a_l = \frac{z\,(cot\theta - cot\alpha)}{2} = \frac{497{,}25 \cdot (2{,}5 - 0)}{2} = 622\, mm$$

rezultă 0,67 + 0,62 = 1,30 m, la care se adaugă ancorarea minimă 10ϕ = 0,20 m. Barele de sus se prelungesc, prin urmare, **1,50 m în deschidere** de la fața reazemului.

Suprapunerea cu barele de montaj. Barele de montaj de la partea superioară se suprapun cu barele de rezistență de pe reazem pe o lungime $l_{sd} = k_{ls} \cdot l_{bd} \geq 15\phi$, cu $k_{ls} = 1{,}2$ (art. 11.5.2, Tabelul 11.3). În această zonă barele de montaj nu preiau efort, deci l_{bd}, calculat cu efortul unitar real σ_{sd}, este mic și guvernează valoarea minimă, raportată la diametrul mai mare dintre barele suprapuse:

$$l_{sd} = 15\varphi = 15 \cdot 20 = 300\,mm$$

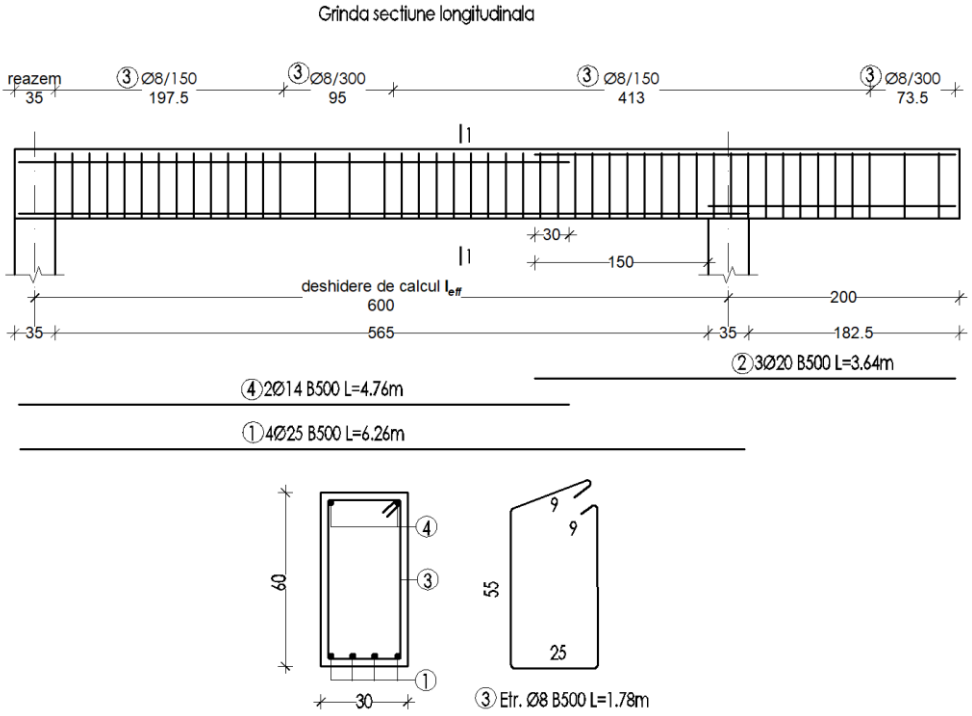


Figura 6.5 — Detaliu de armare, Exemplu 3

Exemplu 4 — Grindă cu trei forțe concentrate

Se consideră o grindă simplu rezemată cu deschiderea efectivă l_{eff} = 8,00 m, solicitată de o încărcare uniform distribuită de calcul qd = 25,0 kN/m și de trei forțe concentrate egale, de 60 kN fiecare, aplicate la 2,00 m, 4,00 m și 6,00 m de reazemul din stânga (de exemplu, reacțiunile a trei grinzi secundare). Beton C25/30, oțel B500, XC1, clasa structurală S4, D_{upper} = 16 mm.

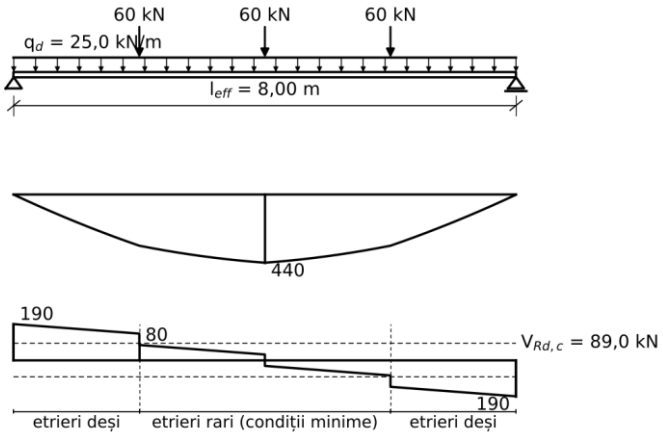


Figura 6.6 — Schema statică, diagrama de momente și diagrama de forță tăietoare, Exemplu 4

Reacțiuni și eforturi

$$R = \frac{q_d \, l_{eff} + 3F}{2} = \frac{25{,}0 \cdot 8{,}00 + 3 \cdot 60}{2} = 190{,}0 \; kN$$

$$M_{Ed} = 190{,}0 \cdot 4{,}00 - \frac{25{,}0 \cdot 4{,}00^2}{2} - 60 \cdot 2{,}00 = 440{,}0 \; kNm$$

Diagrama de forță tăietoare are formă de trepte: pornește de la 190 kN, scade liniar până la 140 kN înaintea primei forțe, coboară brusc la 80 kN după ea, și așa mai departe, simetric față de mijlocul deschiderii.

1-2. Materiale și acoperire

Aceleași ca în exemplele precedente: f_{cd} = 16,667 MPa, f_{yd} = 434,78 MPa, μ_{lim} = 0,372; $c_{nom,sl}$ = 35 mm, $c_{nom,sw}$ = 25 mm, d1 = 47,5 mm.

3. Predimensionarea secțiunii

$$d_{săgeată} = \frac{8000}{15} = 533\,mm \quad d_{rezistență} \geq \sqrt{\frac{440 \cdot 10^6}{0{,}372 \cdot 300 \cdot 16{,}667}} = 486\,mm$$

$$d = 533\,mm \rightarrow h = 533 + 47{,}5 = 580{,}5\,mm \rightarrow se\ adoptă\ h = 700\,mm$$

S-a ales varianta cu rezervă: la o deschidere de 8,00 m, încărcată și cu forțe concentrate, săgeata este criteriul supărător, iar o înălțime mai mare permite ca întreaga armătură să între pe un singur rând. Rezultă d = 652,5 mm; din 2 ≤ h/b ≤ 3 (233 ≤ b ≤ 350 mm) se adoptă b = 300 mm. Secțiunea: b × h = 300 × 700 mm.

4-7. Armătura longitudinală

$$\mu = \frac{440 \cdot 10^6}{300 \cdot 652{,}5^2 \cdot 16{,}667} = 0{,}207 \leq 0{,}372 \quad \omega = 0{,}234$$

$$A_{s,nec} = \frac{0{,}234 \cdot 300 \cdot 652{,}5 \cdot 16{,}667}{434{,}78} = 1757\,mm^2$$

$$A_{s,eff} = 4ø25 = 1963\,mm^2 > 1757\,mm^2\ \checkmark \quad c_{s,eff} = 43{,}3\,mm > 25\,mm\ \checkmark$$

$$x = 213{,}4\,mm \quad z = 567{,}1\,mm \quad M_{Rd} = 484\,kNm \geq 440\,kNm\ \checkmark$$

Continuare — verificarea și dimensionarea la forță tăietoare

$$z = 0{,}9 \cdot 652{,}5 = 587{,}25\,mm \quad \tau_{Ed} = \frac{190\,000}{300 \cdot 587{,}25} = 1{,}078\,MPa$$

$$\rho_l = \frac{1963}{300 \cdot 652{,}5} = 0{,}01003 \quad \tau_{Rd,c} = 0{,}505\,MPa \quad \tau_{Rdc,min} = 0{,}417\,MPa$$

$\tau_{Rd,c}$ = 0,505 MPa < τ_{Ed} = 1,078 MPa → este necesară armătură de forfecare calculată.

$$\sigma_{cd} = 1{,}078 \cdot 2{,}9 = 3{,}13\,MPa \leq 8{,}33\,MPa \;\checkmark$$

$$s \leq \frac{100{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 434{,}78}{300 \cdot 1{,}078} = 338\,mm \quad smax = min(0{,}75 \cdot 652{,}5\,;\,419\,;\,300) = 300\,mm$$

Calculul dă 338 mm, dar guvernează plafonul practic, deci se adoptă s = 300 mm (ϕ8/300); ρ_w = 0,001117 ≥ 0,000800 ✓, iar τ_{Rd} = 0,001117 · 434,78 · 2,5 = 1,214 MPa ≥ 1,078 MPa ✓.

10. Dispunerea etrierilor pe lungimea grinzii

$$V_{Rd,c} = \tau_{Rd,c}\, b_w\, z = 0{,}505 \cdot 300 \cdot 587{,}25 = 88\,980\,N \approx 89{,}0\,kN$$

La forțe concentrate diagrama nu mai este un triunghi, deci limitele nu se mai obțin prin asemănarea triunghiurilor, ci din intersecția diagramei cu $V_{Rd,c}$. Cotele se măsoară din axul reazemului din stânga:

de la	până la	etrieri
0	2,00 m	calculați
2,00 m	6,00 m	condiții minime
6,00 m	8,00 m	calculați

Limita zonei coincide cu punctul de aplicare al primei forțe concentrate: înainte de ea V_{Ed} scade de la 190 kN la 140 kN, iar imediat după ea coboară la 80 kN, sub $V_{Rd,c}$.

Soluție finală

b × h = 300 × 700 mm; 4ø25 la partea inferioară; etrieri ϕ8/300 mm pe toată deschiderea. Plafonul practic guvernează în ambele zone, deci pasul rezultă același; împărțirea pe zone rămâne necesară pentru verificare, nu pentru execuție.

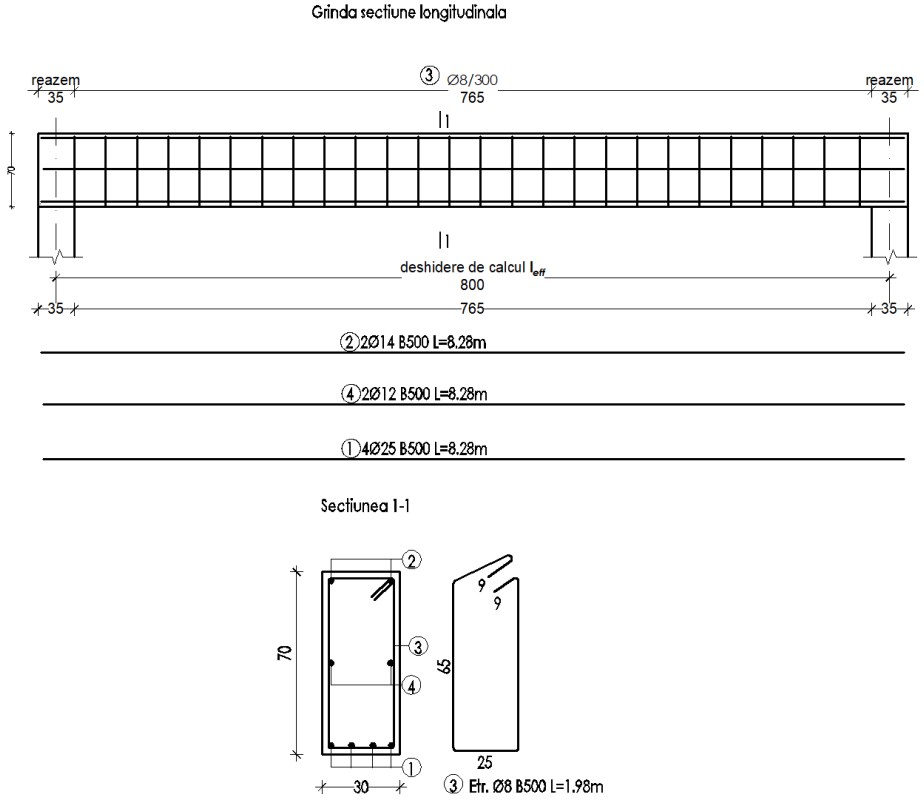


Figura 6.7 — Detaliu de armare, Exemplu 4

BIBLIOGRAFIE

Baza normativă a acestei lucrări este SR EN 1992-1-1:2024, împreună cu Anexa Națională SR EN 1992-1-1/NA:2025. Citările din text („art. X.Y”, „formula Z”, „Tabelul X.Y”) se referă la acest standard, dacă nu este indicată explicit o altă sursă. Sursele suplimentare, folosite pentru context istoric, explicații alternative sau verificare încrucișată, sunt listate mai jos.

Standarde și reglementări

SR EN 1992-1-1:2024 — Eurocod 2. Proiectarea structurilor din beton. Partea 1-1: Reguli generale și reguli pentru clădiri, poduri și structuri de inginerie civilă. ASRO.

SR EN 1992-1-1:2024/NA:2025 — Anexa Națională la SR EN 1992-1-1:2024. ASRO.

SR EN 1990 — Eurocod. Bazele proiectării structurale. ASRO.

SR EN 1991 (părțile relevante) — Eurocod 1. Acțiuni asupra structurilor. ASRO.

SR EN 206+A2 — Beton. Specificație, performanță, producție și conformitate. ASRO.

SR EN 13670 — Execuția structurilor de beton. ASRO.

SR EN 10080 — Oțel pentru armarea betonului. Oțel sudabil pentru beton armat. Generalități. ASRO.

SR 438-1:2012 — Produse de oțel pentru armarea betonului. Partea 1: Mărci și condiții tehnice de calitate. ASRO.

NE 012/1 — Cod de practică pentru producerea betonului (implementare națională a SR EN 206).

Cursuri și materiale didactice proprii

Note de curs și seminar — Betonul armat și precomprimat 1, predate în perioada 2012-2026. Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, Facultatea de Construcții.